А.А. Беланов

Решение алгебраических уравнений методом ЛОБАЧЕВСКОГО

ББК 22.193
Б43
УДК 519.61

Б е л а н о в А. А. **Решение алгебраических уравнений методом Лобачевского**. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 96 с. – ISBN 5-02-013961-0.

Изложен модернизированный метод Лобачевского отыскания корней многочленов. Модернизация позволила сделать метод эффективным для решения задач на малых вычислительных устройствах и более простым в реализации.

Имеются программы для микрокалькуляторов типа «Электроника Б3-34».

Приводится много примеров, поясняющих те или иные особенности метода.

Для специалистов, выполняющих расчеты на малых вычислительных устройствах.

Табл. 32. Ил. 10. Библиогр. 24 назв.

Р е ц е н з е н т
член-корреспондент АН СССР *В.В. Воеводин*

Научное издание

БЕЛАНОВ Александр Андреевич

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
МЕТОДОМ ЛОБАЧЕВСКОГО

Заведующий редакцией *Е.Ю. Ходан*
Редактор *Е.Е. Тыртышников*
Художественный редактор *Г.М. Коровина*
Технический редактор *В.Н. Кондакова*
Корректоры: *Е.Ю. Рычагова, Л.С. Сомова*

ИБ № 32687

Сдано в набор 16.03.88. Подписано к печати 22.09.88.
Формат 84×108/32. Бумага кн.-журнальная.
Гарнитура обыкновенная новая. Печать высокая.
Усл. печ. л. 5,04. Усл. кр.-отт. 5,25. Уч.-изд. л. 5,1.
Тираж 17500 экз. Заказ № 1452. Цена 30 коп.

Ордена Трудового Красного знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15
Вторая типография издательства «Наука»
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6

$$\text{Б}\,\frac{1602120000-005}{053(02)\text{-}89}\,4\text{-}89$$

ISBN 5-02-013961-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи, требующие решения нелинейных алгебраических уравнений, встречаются во многих областях науки и техники. Поэтому разработано большое число способов решения таких уравнений.

В связи с повсеместным распространением программируемых микрокалькуляторов и персональных микро-ЭВМ возрос интерес к простым высокоточным способам решения уравнений, реализуемым на этих вычислительных устройствах: если уравнение с высокой точностью можно решить на микрокалькуляторе в течение 15-30 мин, то обращение к более мощной ЭВМ становится нецелесообразным – общие затраты времени на решение уравнения с помощью этой техники коллективного пользования (подготовка программы, оформление заявки, ожидание утвержденного исполнителю времени использования ЭВМ и т.п.), как правило, больше.

До середины 50-х годов метод Лобачевского считался одним из самых совершенных способов решения нелинейных алгебраических уравнений [2, 3, 7, 17, 24]. Однако попытки реализации его на ЭВМ не удались из-за недостаточной универсальности и громоздкости алгоритма и низкой точности определения корней с близкими и равными модулями. Поэтому в настоящее время при решении уравнений как на ЭВМ, так и на микрокалькуляторах метод Лобачевского не используется [4, 14, 15, 16, 22].

Для устранения недостатков метода Лобачевского разработано несколько его вариантов [6, 10]. Однако эти варианты также не нашли широкого распространения из-за наличия у них не только дополнительных достоинств по сравнению с классическим методом, но и дополнительных недостатков.

В настоящей работе проведен анализ погрешностей метода, изучена зависимость между коэффициентами уравнений, имеющих корни с равными модулями и др. На базе этих исследований предложены новые способы улучшения метода Лобачевского:

1) использование весьма простого признака наличия в уравнении действительных и комплексных корней с равными модулями;

2) вычисление действительных и комплексных корней с равными модулями с помощью сопряженных уравнений, корнями которых являются действительные части комплексных корней или действительные корни заданного уравнения;

3) усовершенствование метода Энке и решение с помощью этого метода уравнений с комплексными корнями, имеющими как различные, так и одинаковые модули;

4) решение уравнений с действительными и комплексными корнями, с различными и одинаковыми модулями с помощью универсального обобщенного метода Лобачевского – метода двукратного квадрирования (преимущества метода возрастают с увеличением степени уравнения);

5) определение комплексных корней с различными модулями весьма простым способом деквадрирования уравнений;

6) определение наличия и места комплексных корней в квадрированном уравнении способом, не требующим информации о знаках коэффициентов уравнения в различных циклах квадрирования;

7) определение знаков действительных и комплексных корней упрощенным способом.

Для повышения точности определения корней с близкими модулями, в соответствии с рекомендациями работы [24], детально рассмотрено применение разложения заданного уравнения по степеням двучлена.

Целесообразность использования и высокая эффективность перечисленных способов продемонстрирована на конкретных примерах. Даны рекомендации по выбору способов в различных условиях.

Кроме того, в работе проведен сравнительный анализ модернизированного метода Лобачевского и широко используемых в настоящее время других методов решения уравнений. Показано, что в одних случаях он не уступает, а во многих других случаях – существенно превосходит применяемые методы. Анализ подтвердил также целесообразность реализации метода Лобачевского на программируемых микрокалькуляторах типа «Электроника БЗ-34» при решении уравнений степени $n \leq 7$, а если модули действительных и комплексных корней равны, – при $n \leq 14$.

Настоящая работа может служить пособием по изучению метода Лобачевского, а также руководством по решению нелинейных алгебраических уравнений на программируемых микрокалькуляторах типа «Электроника БЗ-34». В связи с этим прилагаются программы реализации как самого метода, так и перечисленных выше способов повышения его эффективности. Программы решения уравнений различных степеней однотипны: единообразно вводятся исходные данные, используется одна инструкция, по единой методике анализируются результаты вычислений. Кроме того, обеспечивается решение уравнений, имеющих меньшую степень по сравнению со степенью, указанной в названии программы.

Для облегчения составления программ решения алгебраических уравнений высоких степеней на микро-ЭВМ или на быстродействующих ЭВМ в работе содержится подробное описание соответствующих алгоритмов.

Предложенный в работе способ решения алгебраических уравнений с действительными и комплексными корнями, имеющими равные модули, путем их надлежащего распознавания, составления и решения сопряженных уравнений может быть полезен также при использовании других известных способов решения алгебраических уравнений.

Автор считает приятной обязанностью выразить глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР В.В. Воеводину за весьма ценные замечания и указания, реализация которых существенно улучшила содержание книги, а также профессору МГУ д-ру физ.-мат. наук А.Г. Сухареву и редактору книги канд. физ.-мат. наук Е.Е. Тыртышникову.

А.А. Беланов

§ 1. Краткий обзор литературы по теории и применению метода Лобачевского

Одной из первых работ, в которой изложен рассматриваемый метод, является «Алгебра» Н.И. Лобачевского (опубликованная Казанским университетом в 1834 г. [1]), где была разъяснена сущность метода, приведены формулы для преобразования (квадрирования) уравнений, дан пример решения уравнения. Через три года метод был вновь предложен швейцарским математиком Греффе, а еще раньше, в 1826 г. – французским математиком Данделеном. Поэтому рассматриваемый метод иногда называется методом Лобачевского – Греффе – Данделена [11]. Существенный вклад в разработку метода внес в 1841 г. немецкий астроном Энке.

Применительно к решению уравнений разных типов метод подробно изложен академиком А.Н. Крыловым в лекциях о приближенных вычислениях, впервые опубликованных в 1911 г. [2].

В курсе высшей алгебры Л.Г. Куроша отмечается, что среди методов приближенного вычисления корней наиболее совершенным является метод Лобачевского [3]. Аналогичная оценка этого метода содержится в работах А.К. Сушкевича, Б.П. Демидовича и И.А. Марона, В.Л. Загускина и др. [13, 7, 10]. При этом отмечаются следующие достоинства метода:

1) решение уравнений производится без выполнения громоздких операций предварительного отделения корней;

2) все корни уравнения определяются практически одновременно;

3) определяются различные типы корней – действительные, комплексные, с близкими и равными модулями:

4) корни вычисляются, как правило, с весьма высокой точностью;

5) процесс вычислений всегда сходится.

Однако во многих современных руководствах по вычислительной математике метод Лобачевского излагается весьма кратко или вообще не упоминается [4, 14, 15, 16, 17]. Так, в широко распространенных справочниках по высшей математике [8, 9] изложена лишь сущность метода. Более подробно метод описан в справочнике по решению алгебраических уравнений [10] и в руководстве по высшей математике [11]. Попытка использования метода Лобачевского при решении уравнений с помощью микрокалькуляторов предпринята в работе [23]. Эта попытка, по-видимому, признана авторами работы неудачной и в следующем издании книги [22] метод Лобачевского отсутствует.

Наиболее часто отмечаются недостатки, сформулированные в работе [6] следующим образом: «Метод не является универсальным, так как имеются уравнения, для отыскания корней которых он неприменим. Но и в случаях его применимости, при наличии комплексных корней, его реализация на современных машинах сильно затруднена. Из-за сложной логики практически невозможно составить достаточно универсальную программу решения широкого класса уравнений по методу Лобачевского. Метод можно рекомендовать в основном для ручного счета при отыскании корней с невысокой точностью».

Представляет определенный интерес анализ способов преодоления трудностей, встречающихся при использовании метода Лобачевского, которые рекомендованы в работе [2], и способов, предложенных в настоящей работе.

Чтобы убедиться в том, что уравнение имеет корни с равными модулями, А.И. Крылов [2] рекомендует «поступать по известным приемам разыскания равных корней, отыскивая наибольший делитель между функцией $f(x)$ и ее производной». Вместо этой громоздкой операции, как показано ниже, достаточно сопоставить отношения определенных коэффициентов заданного уравнения.

При решении уравнений с комплексными корнями в работе [2] рекомендуется использовать формулы Виета или Энке. В настоящей работе показано, что использование формул Виета нецелесообразно, а методика Энке может быть модернизирована с целью определения комплексных корней как с разными, так и с одинаковыми модулями. Кроме того, для решения уравнений с разными типами корней предложен весьма простой универсальный метод двукратного квадрирования, достоинства которого проявляются тем больше, чем выше степень уравнения.

Большое внимание в лекциях А.Н. Крылова уделено обоснованию поправок вычисления комплексных корней с близкими модулями. Ниже показано, что даже при использовании современных микрокалькуляторов с весьма ограниченной разрядностью чисел эти поправки не нужны – в обоих вариантах погрешности вычисления корней практически одинаковы.

§ 2. Сущность и точность метода Лобачевского

Пусть задано алгебраическое уравнение

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad \textbf{(2.1)}$$

с действительными коэффициентами. Для определения корней методом Лобачевского уравнение преобразовывают так, чтобы каждый корень нового (квадрированного) уравнения был равен квадрату соответствующего корня исходного уравнения. Затем полученное уравнение вновь квадрируется, и через m циклов преобразования получается уравнение

$$a_{nm} z^n - a_{n-1;m} z^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_{0m} = 0\,. \qquad \textbf{(2.2)}$$

Индекс $n-i$ в уравнениях **(2.1)** и **(2.2)** означает также номер ячейки ЭВМ (микрокалькулятора), в которую записывается данный коэффициент, а индекс m – количество циклов квадрирования, после которых получено данное уравнение.

Корни нового уравнения **(2.2)** связаны с соответствующими корнями уравнения **(2.1)**:

$$z_1 = x_1^N\,, \quad z_2 = x_2^N\,, \quad \ldots\,, \quad z_n = x_n^N\,, \qquad \textbf{(2.3)}$$

где $N = 2^m$, m – количество циклов квадрирования.

Из соотношений **(2.3)** видно, что в результате квадрирования корни уравнения **(2.1)** изменяются по-разному, в зависимости от величины модулей. Рассмотрим способы использования подобного изменения корней при решении алгебраических уравнений.

Для уравнения **(2.1)** формулы Виета, выражающие зависимость коэффициентов уравнения от его корней, имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
-\frac{a_{n-1}}{a_n} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n\,, \\
\frac{a_{n-2}}{a_n} = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n\,, \\
-\frac{a_{n-3}}{a_n} = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n\,, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(-1)^n \frac{a_0}{a_n} - x_1 x_2 \ldots x_n\,.
\end{gathered}
\qquad \textbf{(2.4)}
$$

Формулы Виета для уравнения **(2.2)**:

$$
\begin{aligned}
&\frac{a_{n-1;m}}{a_{nm}} = z_1 + z_2 + \ldots + z_n\,, \\
&\frac{a_{n-2;m}}{a_{nm}} = z_1 z_2 + z_1 z_3 + \ldots + z_{n-1} z_n\,, \\
&\frac{a_{n-3;m}}{a_{nm}} = z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \ldots + z_{n-2} z_{n-1} z_n\,, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{a_{0m}}{a_{nm}} = z_1 z_2 \ldots z_{n-1} z_n\,.
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.5)}
$$

С учетом выражений **(2.3)** формулы **(2.5)** можно преобразовать к виду

$$
\begin{aligned}
&\frac{a_{n-1;m}}{a_{nm}} = x_n^N \left[1 + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^N + \left(\frac{x_{n-2}}{x_n}\right)^N + \ldots\right], \\
&\frac{a_{n-2;m}}{a_{nm}} = x_n^N x_{n-1}^N \left[1 + \left(\frac{x_n x_{n-2}}{x_n x_{n-1}}\right)^N + \ldots\right], \\
&\frac{a_{n-3;m}}{a_{nm}} = x_n^N x_{n-1}^N x_{n-2}^N \left[1 + \left(\frac{x_n x_{n-1} x_{n-3}}{x_n x_{n-1} x_{n-2}}\right)^N + \ldots\right], \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{a_{0m}}{a_{nm}} = x_n^N x_{n-1}^N \ldots x_2^N x_1^N\,.
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.6)}
$$

Рассмотрим наиболее характерные случаи.

1. *Все модули корней различны*, причем

$$|x_n| > |x_{n-1}| > \ldots > |x_1|\,.$$

При достаточно большом показателе степени N отношениями

$$\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^N, \ \left(\frac{x_{n-2}}{x_n}\right)^N, \ \dots, \ \left(\frac{x_1}{x_n}\right)^N$$

можно пренебречь, и уравнения **(2.6)** преобразовываются к виду

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{n-1;m}}{a_{nm}} \cong z_n = x_n^N, \\
&\frac{a_{n-2;m}}{a_{nm}} \cong z_n z_{n-1} = x_n^N x_{n-1}^N, \\
&\frac{a_{n-3;m}}{a_{nm}} \cong z_n z_{n-1} z_{n-2} = x_n^N x_{n-1}^N x_{n-2}^N, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{a_{0m}}{a_{nm}} \cong z_n z_{n-1} \dots z_2 z_1 = x_n^N x_{n-1}^N \dots x_2^N x_1^N.
\end{aligned} \qquad \textbf{(2.7)}$$

Разделив 2-е уравнение **(2.7)** на 1-е, 3-е – на 2-е и т.д., получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{n-1;m}}{a_{nm}} \cong z_n = x_n^N, \\
&\frac{a_{n-2;m}}{a_{n-1;m}} \cong z_{n-1} = x_{n-1}^N, \\
&\frac{a_{n-3;m}}{a_{n-2;m}} \cong z_{n-2} = x_{n-2}^N, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{a_{0m}}{a_{1m}} \cong z_1 = x_1^N.
\end{aligned} \qquad \textbf{(2.8)}$$

Следовательно, модули корней уравнения **(2.1)** таковы:

$$\begin{aligned}
&|x_1| = z_1^{1/N} \cong \left(\frac{a_{0m}}{a_{1m}}\right)^{1/N}, \\
&|x_2| = z_2^{1/N} \cong \left(\frac{a_{1m}}{a_{2m}}\right)^{1/N}, \\
&|x_3| = z_3^{1/N} \cong \left(\frac{a_{2m}}{a_{3m}}\right)^{1/N}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
&|x_n| = z_n^{1/N} \cong \left(\frac{a_{n-1;m}}{a_{nm}}\right)^{1/N}.
\end{aligned} \qquad \textbf{(2.9)}$$

Из формулы **(2.6)** следует, что в главном члене погрешности определения i-го корня имеют вид

$$\Delta_i \cong \frac{x_{i-1}^N + x_{i-2}^N + \dots + x_1^N}{x_i^N}. \qquad \textbf{(2.10)}$$

При достаточно большом различии между корнями или большом показателе N формула **(2.10)** упрощается:

$$\Delta_i \cong \left(\frac{x_{i-1}}{x_i}\right)^N ; \quad |x_{i-1}| < |x_i| . \qquad \textbf{(2.10a)}$$

Погрешности Δ_i, рассчитанные по формуле **(2.10а)**, для уравнений 6-й степени при различных отношениях x_{i-1}/x_i и числе циклов квадрирования $m_1 = 4$, $m_2 = 6$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

Относительные погрешности метода Лобачевского

Число циклов квадрирования m	Отношение x_{i-1}/x_i					
	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,1
4	0,1853	0,0281	0,0033	0,0033	$1{,}5 \cdot 10^{-5}$	10^{-16}
6	0,0011	$6{,}3 \cdot 10^{-7}$	$1{,}2 \cdot 10^{-10}$	$6{,}3 \cdot 10^{-15}$	$5 \cdot 10^{-20}$	10^{-65}

2. Модули всех действительных корней одинаковы:

$$|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_n| .$$

В этом случае при $a_{nm} = 1$ коэффициенты уравнения **(2.6)** имеют следующий вид:

$$a_{n-1;m} = x_n^N \left[1 + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^N + \left(\frac{x_{n-2}}{x_n}\right)^N + \ldots\right] = x_n^N \cdot n ,$$

$$a_{n-2;m} = x_n^N \cdot x_{n-1}^N \left[1 + \left(\frac{x_{n-2}}{x_{n-1}}\right)^N + \left(\frac{x_{n-3}}{x_{n-1}}\right)^N + \ldots\right] = x_n^{2N} \cdot C_n^2 ,$$

$$a_{n-3;m} = x_n^N \cdot x_{n-1}^N \cdot x_{n-2}^N \left[1 + \left(\frac{x_{n-3}}{x_{n-2}}\right)^N + \left(\frac{x_{n-4}}{x_{n-2}}\right)^N + \ldots\right] = x_n^{3N} \cdot C_n^3 ,$$

. . . .

$$a_{0m} = x_1^{nN} \cdot C_n^n = x_1^{nN} .$$

Здесь $C_n^r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$.

Выражения **(2.8)** принимают вид:

$$z_n \cong \frac{a_{n-1;m}}{a_{nm}} = n x_n^N ,$$

$$z_{n-1} \cong \frac{a_{n-2;m}}{a_{n-1;m}} = \left(\frac{C_n^2}{C_n^1}\right) x_n^N ,$$

$$z_{n-2} \cong \frac{a_{n-3;m}}{a_{n-2;m}} = \left(\frac{C_n^3}{C_n^2}\right) x_n^N ,$$

. . . .

$$z_{n-2} \cong \frac{1}{n} x_n^N .$$

Согласно **(2.9)** находим (с точностью до знака) корни заданного алгебраического уравнения:

$$x_n^* = z_n^{1/N} \cong n^{1/N} \cdot x_n\,,$$
$$x_{n-1}^* = z_{n-1}^{1/N} \cong \left(\frac{C_n^2}{n}\right)^{1/N} \cdot x_n\,,$$
$$x_{n-2}^* = z_{n-2}^{1/N} \cong \left(\frac{C_n^3}{C_n^2}\right)^{1/N} \cdot x_n\,, \qquad (2.11)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1^* = z_1^{1/N} \cong \left(\frac{1}{n}\right)^{1/N} \cdot x_n\,.$$

Анализ выражений **(2.11)** позволяет сделать следующие выводы.

1. При большом числе циклов квадрирования m, т.е. при весьма большом показателе степени $N = 2m$, вычисленные значения корней будут отличаться от истинных значений на сколь угодно малые величины, так как если $N \to \infty$, то $n^{1/N} \to 1$, $\left(\frac{C_n^2}{n}\right)^{1/N} \to 1$, $\left(\frac{1}{n}\right)^{1/N} \to 1$.

2. Наибольшие погрешности имеют корни с индексом $i = 1$ и $i = n$, причем x_n больше истинного значения, а x_1 меньше приблизительно на такую же величину.

Корень, имеющий индекс $i = \frac{n}{2} + 1$, вычисляется с наибольшей точностью. Относительная погрешность вычисления корня x_n равна

$$\Delta_{xn} = \frac{x_n^* - x_n}{x_n} = n^{1/N} - 1\,. \qquad (2.12)$$

В табл. 2 приведены относительные погрешности определения x_n для уравнений 4-й, 5-й и 6-й степеней, рассчитанные по формуле **(2.12)** при различных циклах квадрирования m.

Таблица 2

Наибольшие относительные погрешности метода Лобачевского при определении корней с равными модулями

Степень уравнения n	Количество циклов квадрирования m			
	4	5	6	8
4	0,0908	0,0443	0,0219	0,0054
5	0,1058	0,0516	0,0255	0,0063
6	0,1185	0,0576	0,0284	0,0070

В общем случае относительная погрешность вычислении модуля корня с индексом i равна

$$\Delta_{x_i} = \left(\frac{C_n^{i-1}}{C_n^i}\right)^{1/N} - 1\,. \qquad (2.13)$$

Относительная погрешность определения модулей, вычисленная по формуле **(2.13)**, приведена в табл. 3.

Таблица 3

Относительные погрешности метода Лобачевского при определении корней с равными модулями уравнения 6-й степени

Кол-во циклов квадрирования m	Модули x_i					
	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1
4	0,1185	0,0589	0,0181	−0,0178	−0,0557	−0,1059
6	0,0284	0,0144	0,0045	−0,0045	−0,0142	−0,0276

Таблица 4

Относительные погрешности метода Лобачевского при определении корней с равными модулями $x_1 = \ldots = x_6 = 2$ уравнения 6-й степени на микрокалькуляторе «Электроника Б3-34»

Кол-во циклов квадрирования m	Модули корней x_i					
	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1
4	0,118496	0,0589395	0,01814375	−0,0178208	−0,0556584	−0,1059425
6	0,0284236	0,0139878	0,00573905	−0,0058334	−0,01363675	−0,0276687

При использовании микрокалькулятора «Электроника Б3-34» погрешности метода Лобачевского в случае решения уравнения 6-й степени с действительными корнями $x_1 \div x_6 = 2$ приведены в табл. 4.

Из сопоставления данных, приведенных в табл. 3, 4, видно, что «теоретические» и «экспериментальные» значения совпадают с высокой точностью.

Из приведенных в табл. 2, 3 данных, кроме того, следует, что при равных модулях корней погрешности метода Лобачевского существенно больше, чем в случае различных модулей. В связи с этим существует мнение, что метод Лобачевского в некоторых случаях численно расходится [12]. Ниже на конкретных примерах показано, что даже при использовании микрокалькуляторов, имеющих небольшую разрядность чисел, численного расхождения метода не наблюдается.

3. Уравнение 4-й степени имеет два действительных корня (x_1 и x_4) и пару комплексно-сопряженных корней ($x_2 = r\cos\varphi + jr\sin\varphi$ и $x_3 = r\cos\varphi - jr\sin\varphi$), где r – модуль, φ – аргумент).

Положим, что $x_4 > r > x_1$, а $a_4 = 1$. После m циклов квадрирования получим

$$
\begin{aligned}
a_{3m} &= x_4^N\left(1 + 2\frac{r^N\cos N\varphi}{x_4^N} + \frac{x_1^N}{x_4^N}\right),\\
a_{2m} &= 2x_4^N r^N\cos N\varphi\left(1 + \frac{x_1^N}{2r^N\cos N\varphi} + \frac{r^N}{2x_4^N\cos N\varphi} + \frac{x_1^N}{x_4^N}\right),\\
a_{1m} &= x_4^N r^{2N}\left(1 + \frac{2x_1^N\cos N\varphi}{r^N} + \frac{x_1^N}{x_4^N}\right),\\
a_{0m} &= x_4^N r^{2N} x_1^N .
\end{aligned}
\qquad \mathbf{(2.14)}
$$

Из анализа выражений **(2.14)** можно сделать следующие выводы.

1. Коэффициенты квадрированного уравнения a_{2m} из-за присутствия сомножителя $\cos N\varphi$ могут принимать отрицательные значения. Это свойство является одним из важнейших признаков наличия и места в квадрированном уравнении комплексных корней. Остальные коэффициенты при $m \geq 1$ положительны.

2. Отношения между некоторыми соседними коэффициентами квадрированного уравнения

$$\frac{a_{1m}}{a_{2m}} = r^N \left[\frac{1 + \dfrac{2x_1^N \cos N\varphi}{r^N} + \dfrac{x_1^N}{x_4^N}}{2\cos N\varphi \left(1 + \dfrac{x_1^N}{2r^N \cos N\varphi} + \dfrac{r^N}{2x_4^N \cos N\varphi} + \dfrac{x_1^N}{x_4^N} \right)} \right],$$

$$\frac{a_{2m}}{a_{3m}} = r^N \left[\frac{2\cos N\varphi \left(1 + \dfrac{x_1^N}{2r^N \cos N\varphi} + \dfrac{r^N}{2x_4^N \cos N\varphi} + \dfrac{x_1^N}{x_4^N} \right)}{1 + 2\dfrac{r^N \cos N\varphi}{x_4^N} + \dfrac{x_1^N}{x_4^N}} \right] \qquad \textbf{(2.15)}$$

после извлечения корня N-й степени с достаточно высокой точностью равны r, независимо от соотношения между действительными и мнимыми частями комплексных корней. Это свойство обусловлено тем, что выражения **(2.15)**, заключенные в квадратные скобки, будучи больше или меньше 1, после извлечения корня N-й степени с высокой точностью равны 1.

Поскольку в алгебраическом уравнении комплексные корни являются попарно сопряженными с равными модулями, в квадрированном уравнении два соседних отношения коэффициентов **(2.15)** имеют весьма близкие значения, приближенно равные r. Следовательно, в том случае, если отношения коэффициентов **(2.15)** после извлечения корней N-й степени существенно различны, можно полагать, что заданное уравнение не имеет комплексных корней.

Как показано выше, модули всех корней квадрированного уравнения, в том числе действительных и комплексных, располагаются один за другим в строгом соответствии с их величиной, причем если модули корней различны, то в соответствии с формулой **(2.10)** погрешность их вычисления практически не зависят от наличия в этом уравнении других корней. Благодаря этому свойству можно полагать, что квадрированное уравнение распадается на несколько практически независимых уравнений 1-й, 2-й, …, s-й степеней, причем сумма степеней всех распавшихся уравнений равна степени n заданного уравнения. Действительно, при разделении всех корней соотношения **(2.8)** можно записать как совокупность следующих уравнений 1-й степени:

$$a_{1m}z + a_0m = 0\,, \quad a_{2m}z + a_1m = 0\,, \quad \dots\,, \quad a_{nm}z + a_{n-1;m} = 0\,.$$

Поскольку модули комплексно-сопряженных корней равны, то при различии в модулях соседних пар комплексных корней квадрированное уравнение **(2.2)** распадается на квадратные (практически независимые) уравнения:

$$\begin{gathered} a_{2m}z^2 + a_{1m}z + a_{0m} = 0\,, \\ a_{4m}z^2 + a_{3m}z + a_{2m} = 0\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{nm}z^2 + a_{n-1;m}z + a_{n-2;m} = 0\,. \end{gathered} \qquad \textbf{(2.16)}$$

Если заданное уравнение имеет одну или несколько пар действительных корней с близкими или равными модулями, то квадрированное уравнение также распадается на квадратные уравнения типа **(2.16)**. Для определения корней в этом случае необходимо, очевидно, найти корни квадратных уравнений типа **(2.16)**, а затем с помощью формул **(2.8)** – модули корней заданного уравнения.

Необходимо отметить, что если в формуле

$$z_{1,2} = \frac{-a_{im} \pm \sqrt{a_{im}^2 - 4a_{i-1;m} \cdot a_{i+1;m}}}{2a_{i+1;m}} \qquad \textbf{(2.17)}$$

дискриминант отрицателен, то это указывает на то, что заданное уравнение содержит комплексно-сопряженную пару корней. Использование дискриминанта для распознания комплексно-сопряженных корней весьма часто затруднительно из-за больших значений коэффициентов. Вследствие этого квадраты и произведения коэффициентов могут превышать допустимый для данной ЭВМ диапазон чисел. Поэтому вместо определения знака дискриминанта целесообразно рассмотреть условие

$$a_{im} < 2\sqrt{a_{i-1;m}} \cdot \sqrt{a_{i+1;m}}\,. \qquad \textbf{(2.18)}$$

Данное неравенство справедливо для всех комплексных корней, а также может быть справедливо для действительных корней с равными или очень близкими модулями. Поэтому применительно к микрокалькулятору «Электроника Б3-34» его необходимо дополнить условием

$$\Delta = \left| \frac{a_{im} - 2\sqrt{a_{i-1;m}} \cdot \sqrt{a_{i+1;m}}}{a_{im}} \right| \geq 10^{-3}\,. \qquad \textbf{(2.19)}$$

Значение предложенного признака определения наличия в заданном уравнении комплексных корней и их места в квадрированном уравнении состоит в том, что он позволяет полностью автоматизировать процесс квадрирования, отказавшись от запоминания знаков коэффициентов в каждом цикле квадрирования. Последняя информация полезна только в особо сложных случаях, при наличии корней с близкими и равными модулями.

Количество циклов квадрирования целесообразно ограничивать только возможностями ЭВМ, так как с увеличением m точность вычисления корней, как правило, возрастает.

§ 3. Алгоритм квадрирования уравнений и его реализация на микрокалькуляторах типа «Электроника Б3-34»

Коэффициенты квадрированного уравнения можно вычислить, представив заданное уравнение **(2.1)** в виде

$$a_n(x + x_1)(x + x_2) \dots (x + x_n) = 0\,. \qquad \textbf{(3.1)}$$

Умножим уравнение **(3.1)** на аналогичное уравнение

$$a_n(x_1 - x)(x_2 - x) \dots (x_n - x) = 0\,. \qquad \textbf{(3.2)}$$

Произведение уравнений **(3.1)** и **(3.2)** имеет вид

$$a_n^2(x_1^2 - x^2)(x_2^2 - x^2)\dots(x_n^2 - x^2) = 0\,.$$

Обозначим $y = -x^2$, $y_1 = -x_1^2$, $y_2 = -x_2^2$, …, $y_n = -x_n^2$ и, повторив произведенные выше преобразования m раз, получим уравнение

$$a_{nm}(z + z_1)(z + z_2)\dots(z + z_n) = 0\,,$$

которое является аналогом уравнения **(2.2)**.

Выполним указанные выше операции для уравнения 4-й степени:

$$(a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)\cdot(a_4x^4 - a_3x^3 + a_2x^2 - a_1x + a_0) =$$

$$= a_4^2x^8 - (a_3^2 - 2a_2a_4)x^6 + (a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4)x^4 - (a_1^2 - 2a_0a_2)x^2 + a_0^2 = 0\,.$$

Следовательно, после 1-го цикла преобразования поручим уравнение, имеющее корни, равные квадратам корней заданного уравнения (со знаками «$-$»):

$$a_{41}y^4 + a_{31}y^3 + a_{21}y^2 + a_{11}y + a_{01} = 0\,,$$

где

$$y = -x^2\,,\quad a_{41} = a_4^2\,,\quad a_{31} = a_3^2 - 2a_2a_4\,,$$
$$a_{21} = a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4\,,\quad a_{11} = a_1^2 - 2a_0a_2\,,\quad a_{01} = a_0^2\,. \qquad \textbf{(3.3)}$$

Отсюда следует, что алгоритм определения коэффициентов квадрированного уравнения весьма прост: каждый коэффициент преобразованного уравнения равен квадрату прежнего коэффициента минус удвоенное произведение соседних с ним коэффициентов, плюс удвоенное произведение следующих в порядке близости коэффициентов и т.д. Этот алгоритм одинаков для всех циклов и для уравнений любой степени.

При больших показателях степени n определение коэффициентов квадрированного уравнения целесообразно производить без формул, с помощью двух полосок бумаги, использование которых продемонстрируем на элементарном примере вычисления коэффициентов a_{11} и a_{21} уравнении 4-й степени (рис. 1).

4	3	2	1	0		
		0	1	2	3	4

$$a_{11} = a_1^2 - 2a_0a_2$$

4	3	2	1	0
0	1	2	3	4

$$a_{21} = a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4$$

Рис. 1

Предположим, что в ячейках ЭВМ $0\div4$ хранятся соответствующие коэффициенты, а номера ячеек записаны на двух полосках бумаги в обычном и в обратном порядке. На рис. 1 показаны положения полосок бумаги при определении коэффициентов a_{11} и a_{21} уравнения 4-й степени. В общем случае для определения i-го коэффициента уравнения **(2.2)** необходимо разместить полоски так, чтобы клетки с номером i находились одна над другой. Коэффициенты уравнения, записанные в ячейки ЭВМ, номера которых находятся один над другим, перемножаются. Причем если

i – четное число, то произведения коэффициентов, записанные в четные номера ячеек, суммируются, а в нечетные номера – вычитаются. При нечетном i указанные действия производятся в обратном порядке.

Полученные в процессе квадрирования новые значения соответствующих коэффициентов записываются в другие ячейки памяти ЭВМ, а после определения всех коэффициентов, кроме крайних (a_{01} и a_{n1}), записываются вместо их предшествующих значений. Коэффициенты a_{01} и a_{n1} вычисляются последними и сразу записываются в ячейки 0 и n.

Изложенный выше алгоритм реализован в прилагаемых программах квадрирования и определения модулей корней уравнений 3÷7-й степеней, предназначенных для микрокалькуляторов типа «Электроника Б3-34». Программы для уравнений степеней от 3-й до 6-й имеют идентичные инструкции.

Коэффициенты уравнения при показателях степени $1 \div n$ записываются в ячейки с такими же обозначениями. Коэффициент при нулевой степени (свободный член) вместо ячейки 0 необходимо записать в ячейку C. Ячейка 0 используется для записи числа циклов m, которое можно определить по соответствующей формуле или путем последовательного возведения в квадрат коэффициента уравнения, имеющего наибольшую величину, – до тех пор, пока порядок возводимого числа не превысит 50. Количество возведений в квадрат приблизительно равно числу циклов квадрирования.

После прекращения квадрирования необходимо проверить порядок наибольшего коэффициента. Если этот порядок меньше 50, то квадрирование целесообразно продолжить. Разделив все коэффициенты уравнения на число порядка 10^{49} (если в уравнении нет коэффициента a_{0m} существенно меньше 1), можно провести еще один цикл квадрирования, которое, как правило, увеличивает точность определения модулей корней.

Если уравнение содержит коэффициент a_0 меньше 1 (при $a_n = 1$), то необходимо также несколько раз возвести в квадрат наименьший коэффициент. Процесс возведения заканчивается, если наименьший коэффициент имеет порядок меньше -49. Для дополнительного квадрирования в этом случае необходимо все коэффициенты умножить на число 10^{49}.

В общем случае при наличии в уравнении коэффициента $a_0 < 1$ необходимо все коэффициенты уравнения разделить на число (при $a_n = 1$)

$$\Delta = \sqrt{a_{\max} a_0}\,, \tag{3.4}$$

где $a_{\max}$ – наибольший коэффициент заданного уравнения.

Из-за недостаточного количества ячеек памяти микрокалькуляторов «Электроника Б3-34» программа решения уравнений 7-й степени имеет следующие особенности. Пуск программы производится после каждого цикла квадрирования нажатием на клавиши В/О, С/П. В ячейку 96 программной памяти записывается команда ИПz, где z – ячейка памяти, в которой содержится наибольший (или наименьший) коэффициент уравнения. Квадрирование прекращается, если порядок наибольшего коэффициента превышает 50, или в случае, если порядок наименьшего коэффициента находится в интервале от -50 до -99. Количество циклов квадрирования запоминается. Затем вводится программа автоматического определения модулей корней (вместо части программы квадрирования), и дальнейшие действия оператора идентичны действиям при решении уравнений 3÷6-й степеней.

Для определения знаков корней можно использовать следующую теорему Декарта: число положительных корней многочлена $f(x)$, засчитываемых каждый столько раз, какова его кратность, равно числу перемен знаков в системе коэффициентов этого многочлена (причем равные нулю коэффициенты не учитываются) или меньше этого числа на четное число.

Дополнительные рекомендации по использованию прилагаемых программ изложены в следующем примере.

П р и м е р 3.1. Решить уравнение

$$x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720 = 0 .$$

1. Запишем в памяти калькулятора программу № 4 (*см. приложение*), а в ячейках 1÷6 – коэффициенты при x с показателями степени от 1-й до 6-й соответственно. Свободный член записывается в ячейку С.

2. Для приближенного определения числа циклов квадрирования m раз возводим в квадрат коэффициент -1764. Эту операцию прекращаем после превышения порядка числа 50. Изложенным способом определяем, что $m = 4$ и заносим в ячейку 0.

3. Нажатием на клавиши В/О, С/П производим автоматическое квадрирование уравнения. При $m = 4$ время счета до останова составит примерно 3 мин.

4. После останова счета проверяем порядок наибольшего коэффициента (нажатием на клавиши ИП, 6). Порядок коэффициента оказался меньше 50.

5. Для проведения еще одного цикла квадрирования нажимаем на клавиши В/О, С/П.

6. После останова счета в ячейку Д записывается показатель

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} .$$

7. Для определения модуля корня x_1 необходимо нажать на клавиши ИПС, ИП1, С/П. После останова счета на индикаторе высвечивается значение этого модуля.

8. Для определения любого другого модуля, например x_4, необходимо нажать на клавиши ИП3, ИП4, С/П.

Отметим, что точность вычислений модулей повышается, если знаменатель показателя степени $1/N$ определяется не с помощью калькулятора (по формуле $N = 2^m$), а по табл. 5.

Т а б л и ц а 5

Определение показателя N по числу m

m	3	4	5	6	7	8	9	10
N	8	16	32	64	128	256	512	1024

Вычисленные значения модулей $x_1 \div x_6$ при различных циклах квадрирования приведены в табл. 6. Для осуществления 6-го цикла квадрирования все коэффициенты после 5-го цикла были разделены на число 10^{49}.

Таблица 6

Результаты вычисления модулей корней уравнения 6-й степени

Величина модулей x_i	Истинные значения ($m = 0$)	Количество циклов		
		$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$
x_1	1	0,9999990	1,0000000	0,9999994
x_2	2	1,9998098	1,9999998	2,0000103
x_3	3	2,9983698	2,9999968	2,9999543
x_4	4	3,9951913	3,9999132	4,0000088
x_5	5	4,9923168	4,9996675	4,9999175
x_6	6	6,0203344	6,0005478	6,0000283

Поскольку модули корней значительно отличаются один от другого, корни уравнения являются действительными. Используя теорему Декарта, определяем, что уравнение имеет 6 перемен знаков коэффициентов, т.е. оно может иметь 6 положительных корней. Сопоставив сумму корней с коэффициентом $a_5 = -21$, убеждаемся в том, что знаки и модули определены правильно.

Сопоставив истинные значения модулей с вычисленными, убеждаемся также в том, что фактические погрешности вычислений с высокой точностью совпадают с их оценками по формулам **(2.10)** и **(2.10a)**.

Анализ погрешностей показывает, что в полном соответствии с теорией погрешности определения наибольших модулей заметно больше других погрешностей из-за того, что относительные величи́ны отличий этих модулей от соседних наименьшие. Следовательно, для повышения точности определения корней заданное уравнение целесообразно преобразовать (см. ниже) таким образом, чтобы относительное различие в величине модулей, значения которых наиболее близки, было как можно больше.

Точность вычисления модулей корней x_5 и x_6 можно повысить, определив корни следующего квадратного уравнения:

$$a_{6m}z^2 + a_{5m}z + a_{4m} = 0\,. \qquad \textbf{(3.5)}$$

Дли решения этого уравнения, имеющего весьма большие значения корней, целесообразно предварительно разделить все коэффициенты на величину a_{6m}.

Если решение квадратного уравнения **(3.5)** произвести после 5-го цикла квадрирования, то будут получены уточненные значения модулей $x_5 = 5{,}0001257$; $x_6 = 6{,}0000016$.

§ 4. Алгоритмы разложения уравнения по степеням двучлена и определения знаков корней. Применение их совместно с методом Лобачевского

Разложение многочлена по степеням суммы или разности равнозначно смещению нуля по оси x, на которой нанесены значения действительных корней или действительных частей комплексных корней, на заданную величину $\pm b$. Вследствие этого относительная величина различия модулей соседних корней может быть существенно увеличена, что позволяет увеличить точность определения модулей корней методом Лобачевского [24].

Для разложения многочлена по степеням $x \pm b$, деления многочлена на двучлен $x \pm b$, а также для вычисления значения многочлена при величине x, равной $\pm b$, целесообразно использовать один и тот же алгоритм – схему Горнера, которая состоит в следующем.

Коэффициенты многочлена, начиная с a_n, записываются в строку. Слева, ниже этой строки, записывается число b с обратным знаком, т.е. если b – это корень x_1, подлежащий исключению из уравнения, то знак b в схеме Горнера должен совпадать со знаком корня x_1. Затем под коэффициентом a_n записывается еще раз этот же коэффициент, под коэффициентом a_{n-1} – произведение $a_n \cdot b$, сложенное с коэффициентом a_{n-1}, т.е. число $c_1 = a_n b + a_{n-1}$. Под коэффициентом a_{n-2} записывается число $c_2 = c_1 b + a_{n-2}$ и т.д. Значение многочлена при $x = b$ равно числу c_{n-1}, а коэффициенты делимого – значениям a_n и $c_1 \div c_{n-2}$:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_0
b	a_n	$c_1 = ba_n + a_{n-1}$	$c_2 = bc_1 + a_{n-2}$	…	$c_{n-1} = c_{n-2}b + a_1$

Пример 4.1. Разделить многочлен

$$f(x) = 2x^3 - 3x + 5$$

на двучлен $x - 4$ и определить его значение при $x = 4$.

Решение. Составляем схему Горнера:

	2	0	–3	5
4	2	8	29	121

Таким образом,

$$f(x) = (2x^2 + 8x + 29)(x - 4) + 121\,;$$

$$f(4) = 121\,.$$

Для вычисления коэффициентов разложения многочлена $f(x)$ по степеням двучлена $x \pm b$ необходимо последовательно разделить на этот двучлен:

а) заданный многочлен;

б) полученное частное (без последнего члена);

в) вновь полученное частное (также без последнего члена) и т.д.

Последние члены являются коэффициентами и свободным членом разложения заданного уравнения.

Пример 4.2. Разложить многочлен

$$f(x) = 2x^3 - 3x + 5$$

по степеням двучлена $x - 4$.

Решение. Составляем полную схему Горнера, в которой в первой строке записываются коэффициенты уравнения, во второй строке – коэффициенты частного и остаток и т.д.:

	2	0	–3	5
4	2	8	29	121
	2	16	93	
	2	24		
	2			

Следовательно,

$$f(x) = 2(x - 4)^3 + 24(x - 4)^2 + 93(x - 4) + 121\,.$$

Полная схема Горнера реализована в программе № 8 (*см. приложение*). При использовании этой программы без изменений осуществляется разложение заданного уравнения по степеням суммы или разности. Если необходимо разделить заданное уравнение на двучлен, то в ячейку 21 следует записать новую команду: С/П. При вычислении значения многочлена $f(b)$ в ячейки 15÷22 необходимо, кроме того, записать ряд команд. В этом случае значения коэффициентов уравнения не меняются, а результат $f(b)$ записывается в ячейку С.

Во всех вариантах использования схемы Горнера коэффициент a_0 заданного уравнения должен быть записан в ячейку 0.

Выбор оптимальной величины и знака параметра разложения b можно осуществить лишь в том случае, если известны хотя бы приблизительно корни уравнения, т.е. после приближенного решения заданного уравнения. Затем необходимо решить преобразованное уравнение.

Чтобы избежать увеличения объема вычислений в 2 раза, иногда целесообразно провести разложение уравнения перед использованием метода Лобачевского. При этом за ориентировочное значение параметра разложения b можно принять приближенное значение $a_0^{1/n}$, а знак b в схеме Горнера выбирается противоположным знаку коэффициента a_{n-1} решаемого уравнения.

Если в результате разложения уравнения по степеням $x \pm a_0^{1/n}$ свободный член уравнения уменьшается незначительно или даже возрастает, то методом Лобачевского целесообразно решать не преобразованное уравнение, а исходное.

Продемонстрируем применение изложенных выше рекомендаций на конкретных примерах

П р и м е р 4.3. Решить уравнение

$$x^3 - 3\,221x^2 + 3\,454\,210x - 1{,}23321 \cdot 10^9 = 0\,.$$

Р е ш е н и е. После 3-х циклов квадрирования порядок наибольшего коэффициента уравнения больше 50. Поэтому разделим все коэффициенты уравнения на число 10^{49} и произведем еще один цикл квадрирования. Затем определяем модули корней: $x_1 = 980{,}34227$; $x_2 = 1078{,}6986$; $x_3 = 1166{,}1624$. Корни вычислены с весьма большими погрешностями, так как их истинные значения таковы: $x_1 = 1000$; $x_2 = 1110$; $x_3 = 1111$.

При использовании разложения уравнения параметр b должен быть равен $\approx \sqrt[3]{a_0} = 1072{,}37$. Округляем его значение до величины $b = 1100$. В результате разложения заданного уравнения по степеням $x = y + 1100$ получается уравнение

$$y^3 + 79y^2 - 1\,990y + 11\,000 = 0\,.$$

После 5-ти циклов квадрирования находим корни этого уравнения: $y_1 = 9{,}9855489$; $y_2 = 11{,}015918$; $y_3 = -99{,}99998$. Корни заданного уравнения: $x_1 = y_1 + b = 1109{,}9855489$; $x_2 = 1111{,}015918$; $x_3 = 1000{,}00002$. Погрешности вычисления корней не превышают $1{,}5 \cdot 10^{-5}$.

Если из заданного уравнения исключить корень x_3 (поскольку модуль y_3 существенно отличается от других модулей, и поэтому можно полагать, что он вычислен с большой точностью), а затем решить полученное квадратное уравнение, то корни x_2 и x_3 определяются безошибочно.

П р и м е р 4.4. Решить уравнение

$$x^3 - 65x^2 + 1\,087x - 1\,023 = 0\,. \tag{4.1}$$

Р е ш е н и е. В согласии с изложенным выше положим $b = 10$. В результате разложения заданного уравнения по степеням $x = y + 10$ находим новое уравнение

$$y^3 + 85y^2 + 1\,287y + 8\,347 = 0\,, \tag{4.2}$$

в котором свободный член значительно больше свободного члена заданного уравнения. Поэтому квадрируем заданное уравнение. Отметим, что величину свободного члена уравнения **(4.2)** можно определить проще: для этого достаточно вычислить значение $f(b)$ из уравнения **(4.1)**.

После 6-ти циклов квадрирования уравнения **(4.1)** получим:

$$x_1 = 1\,; \quad x_2 = 30{,}991214\,; \quad x_3 = 33{,}009342\,.$$

Если исключить корень x_1 из уравнения **(4.1)**, вычисленный с наибольшей точностью, так как его модуль существенно отличается от модулей других корней, то после решения полученного квадратного уравнения находим, что уточненные значения корней x_2 и x_3 соответственно равны 31 и 33, что совпадает с истинными значениями.

Из анализа корней уравнения **(4.1)** видно, что оптимальное значение параметра $b = 34$. При этом получается уравнение

$$y^3 + 37y^2 + 135y + 99 = 0\,.$$

После 5-ти циклов квадрирования находим

$$y_1 = 1\,; \quad y_2 = -2{,}9999996\,; \quad y_3 = -32{,}999995\,.$$

Следовательно, после обратной замены переменных по формуле $x = y + b$ корни уравнения **(4.1)** определяются почти безошибочно.

Во многих случаях способ предварительного разложения заданного уравнения по степеням $x \pm b$ является единственным способом повышения точности метода Лобачевского.

П р и м е р 4.5. Решить уравнение

$$x^3 - 1\,519x^2 + 769\,118x - 1{,}2980924 \cdot 10^8 = 0\,.$$

Р е ш е н и е. Определяем значение параметра разложения:

$$b = \sqrt[3]{a_0} = \sqrt[3]{1{,}2980924 \cdot 10^8} = 506{,}33178\,.$$

Округлив полученную величину до $b = 500$, произведем разложение заданного уравнения по степеням $x = y + 500$; новое уравнение таково:

$$y^3 - 19y^2 + 118y - 240 = 0\,.$$

После 6-ти циклов квадрирования находим

$$y_1 = 4{,}9999992\,; \quad y_2 = 6{,}0000002\,; \quad y_3 = 7{,}9999993\,.$$

Истинные значения корней: 505, 506, 508. Следовательно, погрешности вычисления этих корней не превышают $1{,}6 \cdot 10^{-9}$.

Если же заданное уравнение решать обычным способом, без разложения уравнения по степеням $y + b$, то после максимально возможного числа циклов квадрирования $m = 4$ определяем следующие значения модулей корней: $x_1 = 472{,}70861$; $x_2 = 506{,}33262$; $x_3 = 542{,}34534$. Модули x_1 и x_3 отличаются от истинных значений на такую большую величину, что полагать заданное уравнение решенным нет оснований.

Перейдем к определению знака корня. Известный способ – подстановка модуля в заданное уравнение – имеет следующие недостатки:

1) необходимо повторно записывать в ячейки $\mathtt{C}$, $1 \div n$ все коэффициенты заданного уравнения, так как после квадрирования в них содержатся другие значения коэффициентов;

2) способ подстановки комплексного корня в заданное уравнение сложен в реализации на микрокалькуляторе;

3) вычисление значения $f(x_i)$ на микрокалькуляторе типа «Электроника Б3-34» требует значительного времени.

Проанализируем абсолютные значения коэффициентов частных, полученных от деления заданного уравнения на двучлены $x + x_i$ и $x - x_i$, где x_i – наибольший модуль корня решаемого уравнения.

Можно доказать, что при несовпадении знака x_i двучлена $x \pm x_i$ со знаком соответствующего корня абсолютные значения коэффициентов частного $A_{n-2} \div A_0$ меньше абсолютных значений соответствующих коэффициентов при обратном знаке x_i.

Действительно, в первом варианте

$$f(x_i) = 0\,, \tag{4.3}$$

во втором варианте

$$f(-x_i) = |M|\,, \tag{4.4}$$

где M – остаток, не равный нулю.

Поскольку $M \neq 0$, коэффициенты частного **(4.4)** больше коэффициентов частного **(4.3)** – при условии, что модуль корней уравнения выбран наибольший.

Следовательно, сопоставляя значения **(4.3)** и **(4.4)**, можно определить знак, соответствующий знаку корня заданного уравнения.

После определения знака корня x_i этот корень исключается из состава коэффициентов a_{n-1} и a_{n-2} (для определения знаков других корней). С помощью схемы Горнера определяем новое значение коэффициента A_{n-2}:

$$A_{n-2} = (a_{n-1} \pm x_i) \cdot (\pm x_i) + a_{n-2}\,. \tag{4.5}$$

При определении знаков действительных частей комплексных корней изложенный алгоритм не меняется. Необходимо лишь вместо коэффициента a_{n-2} использовать коэффициент

$$a^*_{n-2} = a_{n-2} - \sum_{i=1}^{k} r_i^2\,, \tag{4.6}$$

где r_i^2 – квадрат модуля комплексно-сопряженных корней i-й пары; k – количество пар комплексных корней.

Предложенный алгоритм реализуется в прилагаемой программе № 10, применение которой продемонстрируем на следующих примерах.

Пример 4.6. Решить уравнение

$$x^5 - 14{,}451x^4 + 50{,}915376x^3 - 76{,}160098x^2 + 52{,}338867x - 13{,}640154 = 0\,.$$

Решение. После округления получаем $b = 1{,}7$. С помощью программы № 8 находим, что после разложения уравнение имеет вид

$$y^5 - 5{,}951y^4 - 18{,}451424y^3 - 17{,}942021y^2 - 7{,}399709y - 1{,}117148 = 0. \quad \textbf{(4.7)}$$

После 7-ми циклов квадрирования определяем модули корней уравнения **(4.7)**:

$$y_1 = 0{,}47795757\,; \quad y_2 = 0{,}5800171\,; \quad y_3 = 0{,}59002974\,;$$

$$y_4 = 0{,}81200553\,; \quad y_5 = 8{,}409989\,.$$

При определении модуля y_5 обычным способом на индикаторе высвечивается ERROR из-за превышения частным диапазона чисел микрокалькулятора. В этом случае необходимо нажать на клавиши ИП4, 1, С/П и занести полученное число в ячейку 7. Затем нажатием на клавиши 1, ИП5, С/П вычисляем второе число. Перемножив полученные числа, определяем значение модуля y_5.

Для определения знаков модулей используем программу № 11, которая базируется только на двух коэффициентах заданного уравнения, засылаемых: a_{n-1} – в ячейку 8, a_{n-2} – в ячейку 9. Модуль записывается в ячейку A. После нажатия на клавиши В/О, С/П и счета на индикаторе появится модуль с соответствующим знаком.

Данную программу целесообразно вводить с начала программной памяти калькулятора, после осуществления квадрирования. В конце этой программы записывается команда безусловного перехода на начало программы определения модуля.

Изложенным выше способом определяем знаки всех корней уравнения **(4.7)**, а затем с помощью обратной подстановки – корни заданного уравнения. Вычисленные значения корней без разложения заданного уравнения и с его разложением по степеням $x - 1{,}7$ приведены в табл. 7.

Таблица 7

Результаты решения уравнения примера 4.6

Модули	Истинные значения корней	Без разложения уравнения		При разложении уравнения по степеням двучленов $x - 1{,}7$	
		Вычисленные модули	Относительные погрешности	Вычисленные модули	Относительные погрешности
x_1	0,888	0,88797273	$3{,}074 \cdot 10^{-5}$	0,8879945	$6{,}2 \cdot 10^{-6}$
x_2	1,11	1,1087431	$1{,}13 \cdot 10^{-3}$	1,1099703	$2{,}67 \cdot 10^{-5}$
x_3	1,12	1,1211676	$1{,}04 \cdot 10^{-3}$	1,1199829	$1{,}53 \cdot 10^{-5}$
x_4	1,222	1,2221484	$1{,}21 \cdot 10^{-4}$	1,2220427	$3{,}49 \cdot 10^{-5}$
x_5	10,111	10,110999	10^{-7}	10,110999	10^{-7}

При определении наиболее близких корней x_2 и x_3 обычным способом, т.е. путем исключения из заданного уравнения корней x_1, x_4 и x_5 с последующим решением квадратного уравнения, получены значения

$$x_2 = 1{,}1097545\,; \quad x_3 = 1{,}1202092\,;$$

т.е. эти корни определены с бо́льшими погрешностями ($2{,}2 \cdot 10^{-4}$ и $1{,}9 \cdot 10^{-4}$).

Еще один способ определения близких по модулю действительных корней изложен в § 5.

Проведенный анализ точности определения близких по модулю корней справедлив при условии, что используется микрокалькулятор «Электроника Б3-34», имеющий всего 8 разрядов мантиссы. С увеличением разрядности чисел точность вычислений существенно возрастет.

При разложении заданного уравнения по степеням двучлена необходимо обращать внимание на то, чтобы модули корней преобразованного уравнения не были близки, так это снизит точность вычислений.

П р и м е р 4.7. Решить уравнение

$$x^4 + x^3 - 1085x^2 - 717x + 289\,800 = 0\,.$$

Р е ш е н и е. Параметр разложения $b = a_0^{1/4} = 23{,}201955$. Если выбрать значение параметра $b = +23{,}2$ и произвести разложение заданного уравнения, то получим новое уравнение

$$y^4 + 93{,}8y^3 + 2214{,}04y^2 + 502{,}392y - 8635{,}33 = 0\,.$$

После 5-ти циклов квадрирования определяем корни этого уравнения:

$$y_1 = 1{,}799908\,; \quad y_2 = -2{,}200111\,; \quad y_3 = 45{,}6145\,; \quad y_4 = -47{,}805802\,.$$

Следовательно,

$$x_1 = y_1 + b = 1{,}799908 + 23{,}2 = 24{,}999908\,;$$

$$x_2 = y_2 + b = -2{,}200111 + 23{,}2 = 20{,}999889\,.$$

Истинные значения корней $x_1 = 21$, $x_2 = 25$, т.е. погрешности вычислений составляют $(3{,}7 \div 5{,}3) \cdot 10^{-6}$. Если же исключить эти корни и определить два оставшихся корня из полученного квадратного уравнения, то погрешности вычисления корней x_3 и x_4 возрастут до $4 \cdot 10^{-4}$.

Различие между корнями y_1 и y_3 преобразованного уравнения возрастет, если выбрать параметр разложения $b = 22$. При этом получается уравнение

$$y^4 + 89y^3 + 1885y^2 - 4413y - 6210 = 0\,.$$

После 5-ти циклов квадрирования определяем модули корней преобразованного уравнения:

$$y_1 = -1\,; \quad y_2 = 2{,}9999996\,.$$

С учетом округления чисел в микрокалькуляторе получим следующие значения модулей:

$$x_1 = y_1 + b = -1 + 22 = 21\,;$$

$$x_2 = y_2 + b = 2{,}9999996 + 22 \cong 25\,.$$

Исключив эти корни из заданного уравнения, после решения квадратного уравнения находим $x_3 = -23$, $x_4 = -24$, что совпадает с истинными значениями.

§ 5. Анализ некоторых способов вычисления комплексных корней с различными модулями

Наличие и место квадратных квадрированных уравнений с комплексными корнями определяется способами, изложенными в § 2.

Если уравнение **(2.1)** имеет одну пару (i-ю) комплексно-сопряженных корней, то квадрат их модулей вычисляется по формуле

$$r_i^2 = \left(\frac{a_{i-1;m}}{a_{i+1;m}}\right)^{1/N}, \tag{5.1}$$

а действительные и мнимые части этих корней определяются с помощью формулы Виета [7]:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{1}{2}\frac{a_{n-1}}{a_n} - \sum_{k=1}^{n-2} x_k\,, \\ \beta_i &= \sqrt{r_i^2 - \alpha_i^2}\,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

При наличии в уравнении **(2.1)** двух пар (i-й и j-й) комплексно-сопряженных корней их действительные части вычисляются с помощью следующей системы линейных уравнений, получаемых также с помощью формул Виета [2, 7]:

$$\begin{aligned} \alpha_i + \alpha_j &= -\frac{1}{2}\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{1}{2}\left(\sum_{k}^{n-4} x_k\right), \\ \frac{\alpha_i}{r_i^2} + \frac{\alpha_j}{r_j^2} &= -\frac{1}{2}\frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-4}\frac{1}{x_k}\right). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Из формул **(5.2)** и **(5.3)** видно, что погрешности определения действительных корней влияют на погрешности вычисления комплексных корней, что является серьезным недостатком этого метода.

В настоящее время весьма широко используются различные варианты определения трехчленов

$$x^2 + tx + r^2 = 0\,, \tag{5.4}$$

содержащих комплексно-сопряженные корни.

Модули r этих трехчленов вычисляются по формуле **(5.1)**, а коэффициент t – различными способами деления нацело уравнения **(2.1)** на трехчлен **(5.4)** или с помощью методов Бернулли, итераций, Лина, Палувера и др. [10].

Весьма эффективный, но явно недооцениваемый метод (изложен только в работе [2]) предложил немецкий математик и астроном Энке для уравнений **(2.1)** любой четной степени.

Формулы Энке имеют следующий вид:

а) для уравнений 4-й степени:

$$\beta t^2 - \beta_1 t + (\beta_2 - 2\beta r^2) = 0\,, \tag{5.5}$$

где $\beta = 1 + a_0 r^{-4}$, $\beta_1 = a_3 + a_1 r^{-2}$, $\beta_2 = 2a_2$;

$$\gamma t - \gamma_1 = 0\,, \tag{5.6}$$

где $\gamma = 1 - a_0 r^{-4}$, $\gamma_1 = a_3 - a_1 r^{-2}$;

б) для уравнений 6-й степени:

$$\beta t^3 - \beta_1 t^2 + (\beta_2 - 3\beta r^2)t - (\beta_3 - 2\beta_1 r^2) = 0\,, \tag{5.7}$$

где $\beta = 1 + a_0 r^{-6}$, $\beta_1 = a_5 + a_1 r^{-4}$, $\beta_2 = a_4 + a_2 r^{-2}$, $\beta_3 = 2a_3$;

$$\gamma t^2 - \gamma_1 t + (\gamma_2 - \gamma r^2) = 0\,, \tag{5.8}$$

где $\gamma = 1 - a_0 r^{-6}$, $\gamma_1 = a_5 - a_1 r^{-4}$, $\gamma_2 = a_4 - a_2 r^{-2}$;

в) для уравнения 8-й степени

$$\beta t^4 - \beta_1 t^3 + (\beta_2 - 4\beta r^2)t^2 - (\beta_3 - 3\beta_1 r^2)t + (\beta_4 - 2\beta_2 r^2 + 2\beta r^4) = 0\,, \tag{5.9}$$

где $\beta = 1 + a_0 r^{-8}$, $\beta_1 = a_7 + a_1 r^{-6}$, $\beta_2 = a_6 + a_2 r^{-4}$, $\beta_3 = a_5 + a_3 r^{-2}$, $\beta_4 = 2a_4$;

$$\gamma t^3 - \gamma_1 t^2 + (\gamma_2 - 2\gamma r^2)t - (\gamma_3 - \gamma_1 r^2) = 0\,, \tag{5.10}$$

где $\gamma = 1 - a_0 r^{-8}$, $\gamma_1 = a_7 - a_1 r^{-6}$, $\gamma_2 = a_6 - a_2 r^{-4}$, $\gamma_3 = a_5 - a_3 r^{-2}$.

Искомая величина t трехчлена **(5.4)** является общим корнем обоих уравнений Энке для заданного уравнения соответствующей степени, и для ее определения в работе [2] рекомендуется использовать деление одного уравнения на другое.

Из анализа уравнений Энке для заданного уравнения 4-й степени можно сделать следующие выводы.

1. Неизвестный коэффициент t трехчлена **(5.4)** целесообразно определять с помощью уравнения **(5.6)**, которое можно представить в следующем удобном для вычислений виде, учитывая, что $\alpha = -\frac{1}{2}t$:

$$\alpha = -\frac{a_3 - a_1 r^{-2}}{2(1 - a_0 r^4)}\,. \tag{5.6a}$$

Уравнение **(5.5)** не содержит никакой дополнительной информации.

2. С помощью формулы **(5.6a)** можно решать также уравнения 3-й степени (после умножения всех членов на x; учитывая, кроме того, что $a_0 = 0$) и уравнения 5-й степени (после исключения действительного корня).

3. Уравнения Энке можно использовать и в том случае, когда заданное уравнение имеет как комплексные корни, так и действительные.

4. Уравнение Энке **(5.6)** целесообразно использовать и при наличии в заданном уравнении двух пар действительных корней, для которых известны величи́ны и знаки произведений пар корней.

5. Знак при величине t, вычисляемый с помощью уравнений Энке, однозначно определяет знаки соответствующих корней заданного уравнения, и дополнительных проверок не требуется.

6. Погрешности определения корней по формулам Энке зависят только от погрешностей определения соответствующих модулей. Погрешности определения других корней влияния не оказывают.

Все коэффициенты уравнений Энке весьма просты по структуре, что существенно облегчает их решение с помощью ЭВМ.

При решении уравнений 5÷7-й степеней также целесообразно использовать только квадратное уравнение **(5.8)** – его решение и исключение ненужного корня не вызывает затруднений.

Уравнения **(2.1)** с показателями степени $n \geq 8$ целесообразно решать методом двукратного квадрирования (см. § 9).

Если уравнение **(2.1)** имеет корни с равными модулями, то формулы Энке использовать нельзя. Однако ниже будет показано, что после несложных преобразований уравнения **(2.1)**, с помощью формул Энке, имеющих коэффициент γ, можно одновременно определить все корни такого уравнения.

Пример 5.1. Решить уравнение

$$x^4 + x^3 - 10x^2 - 34x - 26 = 0 .$$

Решение. В результате квадрирования получена информация о знаках коэффициентов заданного уравнения:

m	a_{im}				
	a_{4m}	a_{3m}	a_{2m}	a_{1m}	a_{0m}
1	+	+	+	+	+
2	+	+	−	+	+
3	+	+	+	+	+
4	+	+	−	+	+
5	+	+	+	+	+
6	+	+	−	+	+

Анализ информации о знаках коэффициентов показывает, что квадрированное уравнение распадается на два уравнения 1-й степени и одно уравнение 2-й степени, имеющее комплексные корни:

$$a_{46}z + a_{36} = 0 , \quad a_{36}z^2 + a_{26}z + a_{16} = 0 , \quad a_{16}z + a_{06} = 0 .$$

Из уравнений 1-й степени определяем $x_1 = 1{,}142163$; $x_4 = 4{,}0104695$.

Квадрат модулей комплексных корней

$$r^2 = \left(\frac{a_{16}}{a_{36}}\right)^{1/64} = 5{,}6760998 .$$

По формуле **(5.6a)** определяем величину и знак действительной части сопряженных комплексных корней:

$$\alpha = -\frac{a_3 - a_1 r^{-2}}{2(1 - a_0 r^{-4})} = \frac{-1 + 34 \cdot 5{,}6760998^{-2}}{2(1 + 26 \cdot 5{,}6760998^{-4})} = -1{,}9341533 ;$$

$$\beta = \sqrt{r^2 - \alpha^2} = 1{,}6248105 .$$

Следовательно, $x_{2,3} = -1{,}9341533 \pm j \cdot 1{,}6248105$.

Отметим, что $x_1 + x_4 + 2\alpha = -1{,}0000001$, т.е. почти точно совпадает со значением коэффициента $-a_3$.

Пример 5.2. Решить уравнение

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0 .$$

Р е ш е н и е. После 7-ми циклов квадрирования определяем предварительные значения модулей, т.е. значения модулей при условии, что корни являются действительными:

$$x_1 = 0{,}4962907\,; \quad x_2 = 0{,}46526936\,; \quad x_3 = 2{,}1492926\,; \quad x_4 = 2{,}0149141\,.$$

Таким образом, квадрированное уравнение состоит из двух уравнений 2-й степени с различными модулями:

$$a_{47}z^2 + a_{37}z + a_{27} = 0\,,$$
$$a_{27}z^2 + a_{17}z + a_{07} = 0\,.$$

В связи с близостью модулей каждого уравнения проверяем с помощью неравенства **(2.18)** наличие в уравнениях комплексных корней. Неравенство **(2.18)** выполняется для обоих квадратных уравнений. Следовательно, заданное уравнение имеет две пары комплексных корней, модули которых равны

$$r_1^2 = \left(\frac{x_{07}}{x_{27}}\right)^{1/128} = 0{,}23091276\,;$$

$$r_2^2 = \left(\frac{x_{27}}{x_{47}}\right)^{1/128} = 4{,}3306398\,.$$

С помощью формулы **(5.6а)** определяем $\alpha_1 = 0{,}3002425$; $\alpha_2 = -1{,}3002425$. Мнимые части корней соответственно равны $\beta_1 = \sqrt{r_1^2 - \alpha_1^2} = 0{,}37518945$; $\beta_2 = \sqrt{r_2^2 - \alpha_2^2} = 1{,}6248105$. Таким образом,

$$x_{1,2} = 0{,}3002425 \pm j \cdot 0{,}37518945\,;$$
$$x_{3,4} = -1{,}3002425 \pm j \cdot 1{,}6248105\,.$$

Отметим, что величина $-2(\alpha_1 + \alpha_2)$ равна коэффициенту $a_3 = 2$, что свидетельствует о высокой точности метода Лобачевского. Если модули корней, в том числе комплексных, близки, то ошибки их определения возрастают. В этом случае можно использовать поправки к вычисленным значениям модулей r_b. Для уравнений 4-й степени с комплексными корнями исправленные значения модулей вычисляются по формулам

$$r_1^2 = r_{1b}^2\left[1 + 5\left(\frac{r_{1b}}{r_{2b}}\right)^{2N}\right], \qquad \textbf{(5.11)}$$

$$r_2^2 = r_{2b}^2\left[1 + 5\left(\frac{r_{1b}}{r_{2b}}\right)^{2N}\right]. \qquad \textbf{(5.12)}$$

П р и м е р 5.3. Решить уравнение

$$x^4 - 4{,}04x^3 + 8{,}1608x^2 - 8{,}2416x + 4{,}1616 = 0\,.$$

Р е ш е н и е. После 8-ми циклов квадрирования определяем предварительные (при условии, что все корни являются действительными) значения модулей:

$$x_1 = 1{,}410452\,; \quad x_2 = 1{,}4177267\,; \quad x_3 = 1{,}4389353\,; \quad x_4 = 1{,}4463327\,.$$

Модули корней x_1 и x_2, x_3 и x_4 весьма близки. С помощью соотношения **(2.18)** убеждаемся, что уравнение содержит две пары комплексно-сопряженных корней. Находим модули этих пар:

$$r_{1b}^2 = \left(\frac{a_{08}}{a_{2b}}\right)^{1/256} = 1{,}9996355\,;$$

$$r_{2b}^2 = \left(\frac{a_{2b}}{a_{48}}\right)^{1/256} = 2{,}0811793\,.$$

Согласно **(5.6а)** получаем:

$$\alpha_1 = 0{,}99991049\,; \quad \alpha_2 = 1{,}020091\,; \quad \beta_1 = 0{,}99990724\,; \quad \beta_2 = 1{,}0200949\,.$$

Погрешности вычисления корней примерно равны 10^{-4}; истинные значения таковы:

$$x_{1,2} = 1 \pm j \cdot 1\,; \quad x_{3,4} = 1{,}02 \pm j \cdot 1{,}02\,.$$

Исправленные значения модулей, вычисленные по формулам **(5.11)** и **(5.12)**, соответственно равны $r_1^2 = 1{,}9999954$; $r_2^2 = 2{,}0808049$. Этим значениям соответствуют действительные части корней $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = -1{,}0200008$, т.е. корни определяются с ошибками, не превышающими $\Delta = 10^{-6}$. Следовательно, точность определения корней вследствие использования поправок возросла на два порядка.

П р и м е р 5.4. Решить уравнение

$$x^4 - 1{,}91x^3 - 24{,}691x^2 + 51{,}36x - 25{,}755 = 0\,.$$

Р е ш е н и е. После 7-ми циклов квадрирования вычисляем предварительные модули:

$$x_1 = 0{,}99807511\,; \quad x_2 = 1{,}0119479\,; \quad x_3 = 4{,}9970212\,; \quad x_4 = 5{,}1030395\,.$$

С помощью соотношения **(2.18)** определяем, что, хотя модули корней x_1 и x_2, x_3 и x_4 близки, все корни являются действительными. Модули корней x_1 и x_2 можно определить с погрешностями $\Delta_1 = 2 \cdot 10^{-3}$, а модули корней x_3 и x_4 – с погрешностями $\Delta_2 = 6 \cdot 10^{-4}$.

Продемонстрируем возможность уточнения модулей действительных корней с помощью формулы Энке **(5.6а)**. Сопоставляя модули с коэффициентом a_3 заданного уравнения, определяем, что произведение модулей x_1x_2 имеет знак «$+$», а произведение модулей x_3x_4 – знак «$-$». Используя эти произведения с соответствующими знаками вместо значения r^2 в формуле **(5.6а)**, находим, что коэффициенты t в трехчленах **(5.4)** равны $t_1 = -2{,}01$ и $t_2 = 0{,}099999923$.

Решим квадратные уравнения

$$x^2 - 2{,}01x + 1{,}01 = 0\,,$$

$$x^2 + 0{,}099999923x - 25{,}5 = 0\,.$$

Находим $x_1 = 1$; $x_2 = 1{,}01$; $x_3 = 5$; $x_4 = 5{,}1$. Эти значения модулей совпадают с истинными значениями.

П р и м е р 5.5. Решить одно из уравнений Леверье, с помощью которого была открыта планета Нептун:

$$x^6 + 4{,}224x^5 + 6{,}5071x^4 + 7{,}5013x^3 + 8{,}4691x^2 + 3{,}3641x + 1{,}6252 = 0\,.$$

Р е ш е н и е. После 7-ми циклов квадрирования определяем предварительные модули корней, которые образуют три близких по величине пары:

$$a_{27}z^2 + a_{17}z + a_{07} = 0\,,$$

$$a_{47}z^2 + a_{37}z + a_{27} = 0\,,$$
$$a_{67}z^2 + a_{57}z + a_{47} = 0\,.$$

С помощью соотношения **(2.18)** определяем, что эти уравнения имеют комплексные корни. Находим квадраты модулей корней:

$$r_{12}^2 = \left(\frac{a_{07}}{a_{27}}\right)^{1/128} = 0{,}3053145\,;$$
$$r_{34}^2 = \left(\frac{a_{27}}{a_{47}}\right)^{1/128} = 1{,}2965098\,;$$
$$r_{56}^2 = \left(\frac{a_{47}}{a_{67}}\right)^{1/128} = 4{,}1056652\,.$$

Этим значениям модулей соответствуют следующие уравнения **(5.8)** Энке:

а) $56{,}103734t^2 - 31{,}864931t + 4{,}102555 = 0$;

б) $0{,}2542738t^2 + 2{,}2226463t - 3{,}5479827 = 0$;

в) $0{,}9765169t^2 - 4{,}024427t + 0{,}4350647 = 0$.

Решив уравнения Энке, определяем действительные и ложные значения α (из равенства $\alpha = -\frac{1}{2}t$):

а) $\alpha'_{12} = 0{,}098627926$; $\quad \alpha''_{12} = 0{,}18535433$;

б) $\alpha'_{34} = 4{,}449043$; $\quad \alpha''_{34} = 0{,}078406622$;

в) $\alpha'_{56} = -2{,}0050522$; $\quad \alpha''_{56} = 0{,}055550545$.

Последовательно подставляя в заданное уравнение значения $x_i^k = r_i^k \cos k\varphi_i$ ($\varphi_i = \arccos\dfrac{\pm\alpha_i}{r_i}$; k – показатель степени данного члена уравнения), определяем истинные значения α. Отметим, что $\alpha'_{34} > r_{34}$, и можно поэтому полагать, что $\alpha_{34} = \alpha''_{34}$. Имеем $2(\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_3) = 4{,}2239998$, что с высокой точностью соответствует коэффициенту $-a_5$.

Пример 5.6. Решить уравнение (заимствованное из лекций А.Н. Крылова [2]), корни которого имеют близкие модули:

$$x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0\,.$$

Решение. Квадрируем уравнение с записью знаков коэффициентов после каждого цикла:

m	a_{im}							
	a_{7m}	a_{6m}	a_{5m}	a_{4m}	a_{3m}	a_{2m}	a_{1m}	a_{0m}
1	+	+	−	−	+	−	−	+
2	+	+	+	+	+	+	+	+
3	+	+	+	−	+	+	−	+
4	+	+	+	−	+	+	+	+
5	+	+	+	−	+	+	−	+
6	+	+	+	−	+	+	+	+
7	+	+	+	−	+	+	+	+

Условные значения модулей корней:

$x_1 = 1{,}0328279$; $x_2 = 1{,}042455$; $x_3 = 1{,}1080199$; $x_4 = 1{,}2928559$;

$x_5 = 1{,}2889479$; $x_6 = 1{,}5378905$; $x_7 = 1{,}9624903$.

Анализ значений модулей и знаков коэффициентов показывает, что уравнение имеет три действительных корня x_3, x_6 и x_7, а также две пары комплексно-сопряженных корней x_1 и x_2, x_4 и x_5.

Подстановкой действительных корней в заданное уравнение убеждаемся в том, что наиболее точно определен корень x_6. Исключив его, получим следующее уравнение:

$$x^6 + 1{,}5378905x^5 + 0{,}3651071x^4 + 0{,}5614947x^3 - 2{,}1364826x^2 + \\ + 0{,}7143238x - 3{,}9014482 = 0\,.$$

Изложенным выше способом определяем уравнения **(5.8)** Энке:

$$4{,}1258635t^2 - 0{,}9216864t - 2{,}0927827 = 0\,, \qquad \textbf{(5.13)}$$

$$1{,}843081t^2 - 1{,}280659t - 1{,}4241711 = 0\,. \qquad \textbf{(5.14)}$$

Корни уравнений:

для **(5.13)** $t_1 = 0{,}6092137$; $t_2 = 0{,}83260605$;

для **(5.14)** $t_1 = 0{,}59778295$; $t_2 = 1{,}2926297$.

Сопоставляя значения этих корней с величиной $[a_6 - (x_3 + x_6 + x_7)]$, определяем действительные части комплексных корней x_1, x_2 и x_4, x_5:

$$\alpha_{12} = \frac{-1}{2} \cdot 0{,}60916737\,,$$

$$\alpha_{45} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2926389\,.$$

Сумма значений α_i и x_i отличается от коэффициента a_6 заданного уравнения, равного нулю, на относительную величину $\Delta_1 = 4 \cdot 10^{-6}$, что почти совпадает с точностью вычислений этих величин, равной $\Delta_2 = 3 \cdot 10^{-6}$, выполненных в [2] с помощью специальных поправок и семизначных таблиц логарифмов.

Отметим, что если исключить из заданного уравнения действительные корни x_3, x_6 и x_7, а затем решить полученное уравнение 4-й степени с помощью формулы **(5.6а)**, то точность определения корней уменьшится до $\Delta_3 = 10^{-4}$.

Необходимо отметить также, что при использовании изложенного ниже обобщенного метода Лобачевского объем вычислений уменьшается, а точность определении корней существенно увеличивается.

§ 6. Вычисление комплексных корней способом деквадрирования уравнений

Сущность предлагаемого способа вычисления комплексных корней состоит в следующем. После m циклов квадрирования определяют квадратные уравнения, содержащие комплексные корни:

$$a_{im}z^2 + a_{i-1;m}z + a_{i-2;m} = 0\,. \qquad \textbf{(6.1)}$$

Затем с помощью формул Лобачевского преобразовывают одно из квадратных квадрированных уравнений m-го цикла в уравнение, соответствующее предыдущему $(m-1)$-му циклу квадрирования, т.е. в уравнение

$$A_{i;m-1}z^2 + A_{i-1;m-1}z + A_{i-2;m-1} = 0\,, \qquad \textbf{(6.2)}$$

где

$$A_{i;m-1} = \frac{a_{im}}{a_{im}} = 1\,, \quad A_{i-1;m-1} = \sqrt{\frac{a_{i-1;m}}{a_{im}} + 2A_{i-2;m-1}}\,, \quad A_{i-2;m-1} = \sqrt{\frac{a_{i-2;m}}{a_{im}}}\,.$$

При деквадрировании крайние коэффициенты уравнения **(6.2)** имеют знаки «+», а средний коэффициент должен иметь знак, совпадающий со знаком этого коэффициента в соответствующем цикле квадрирования.

П р и м е р 6.1. Способом деквадрирования решить уравнение Леверье (см. пример 5.5):

$$x^6 + 4{,}224x^5 + 6{,}5071x^4 + 7{,}5013x^3 + 8{,}4691x^2 + 3{,}3641x + 1{,}6252 = 0\,.$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся программой № 9 (*см. приложение*). Квадрируем это уравнение с остановом после каждого цикла для записи знаков коэффициентов (для этого необходимо в ячейку 0 записать цифру 1, а после каждого цикла квадрирования нажать на клавиши В/О; С/П):

m	a_{im}						
	a_{6m}	a_{5m}	a_{4m}	a_{3m}	a_{2m}	a_{1m}	a_{0m}
1	+	+	−	−	+	−	+
2	+	+	+	+	+	+	+
3	+	+	+	+	+	−	+
4	+	−	+	+	+	+	+
5	+	−	+	−	+	−	+
6	+	−	+	−	+	−	+
7	+	+	+	−	+	+	+

Анализ изменения знаков коэффициентов показывает, что уравнение распадается на три квадратных квадрированных уравнения, содержащих комплексно-сопряженные корни:

$$a_{27}z^2 + a_{17}z + a_{07} = 0\,, \qquad \textbf{(6.3)}$$

$$a_{47}z^2 + a_{37}z + a_{27} = 0\,, \qquad \textbf{(6.4)}$$

$$a_{67}z^2 + a_{57}z + a_{47} = 0\,. \qquad \textbf{(6.5)}$$

Для деквадрирования в ячейки 00÷22 программной памяти калькулятора записывается программа № 9, а также исходные данные. Если решается уравнение **(6.3)**, то в ячейку А записывается отношение a_{17}/a_{27}, в ячейку В – отношение a_{07}/a_{27}, а в ячейку 0 – число циклов $m = 7$. Деквадрирование начинается нажатием на клавиши В/О; С/П.

По окончании счета на индикаторе появится цифра 6 – номер цикла квадрирования. Из информации о знаках коэффициентов уравнения видно, что в 6-м цикле коэффициент a_{1m} имел знак «−». Поэтому при переходе к следующему циклу необходимо нажать на клавиши /–/; С/П (в 1-м цикле деквадрирования всегда нажимается только клавиша С/П).

Если знак коэффициента a_{1m} положительный (7-й, 4-й, 2-й циклы), то переход к следующему циклу деквадрирования производится нажатием на клавишу С/П.

После появления на индикаторе цифры 0 процесс деквадрирования прекращается. При этом в ячейке А будет число, равное $t_1 = 2\alpha_1$ (где α_1 – действительная часть первой пары комплексных чисел), а в ячейке В – квадрат модуля этой пары r_1^2.

Для деквадрирования уравнения **(6.4)** в ячейку А записывается отношение a_{37}/a_{47}, в ячейку В – отношение a_{27}/a_{47}, а в ячейку 0 – $m = 7$.

В результате деквадрирования уравнений **(6.3)** – **(6.5)** получим соответственно

$$\alpha_1 = 0{,}18535438\,; \qquad r_1^2 = 0{,}3053145\,; \qquad \beta_1 = 0{,}5205365\,;$$
$$\alpha_2 = 0{,}07840679\,; \qquad r_2^2 = 1{,}2965098\,; \qquad \beta_2 = 1{,}1359411\,;$$
$$\alpha_3 = 2{,}0050523\,; \qquad r_3^2 = 4{,}1056652\,; \qquad \beta_3 = 0{,}29228496\,.$$

Сопоставление суммы $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ с величиной $\frac{-1}{2} a_5$ показывает, что α_1 и α_3 имеют знаки «$-$», а α_2 – знак «$+$». Имеем $-2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 4{,}224$, что свидетельствует о высокой точности данного метода (если модули корней существенно различны).

П р и м е р 6.2. Решить уравнение примера 5.3 способом деквадрирования:

$$x^4 - 4{,}04x^3 + 8{,}1608x^2 - 8{,}2416x + 4{,}1616 = 0\,.$$

Р е ш е н и е. Результаты квадрирования этого уравнения с остановом счета после каждого цикла следующие:

m	a_{im}				
	a_{4m}	a_{3m}	a_{2m}	a_{1m}	a_{0m}
1	–	0	+	0	+
2	+	–	+	–	+
3	+	+	+	+	+
4	+	+	+	+	+
5	+	+	+	+	+
6	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+
8	+	+	+	+	+

По характеру флуктуации знаков коэффициентов определяем независимые квадратные квадрированные уравнения:

$$a_{28}z^2 + a_{18}z + a_{08} = 0\,,$$
$$a_{48}z^2 + a_{38}z + a_{28} = 0\,.$$

Вот результаты деквадрирования этих уравнений:

$$\alpha_1 = 1{,}00093\,; \qquad r_1^2 = 1{,}9996354\,; \qquad \beta_1 = 1{,}0009299\,;$$
$$\alpha_2 = 1{,}0211669\,; \qquad r_2^2 = 2{,}0811793\,; \qquad \beta_2 = 1{,}0211668\,.$$

Сопоставление вычисленных составляющих комплексных корней с истинными значениями и значениями, вычисленными по формуле Энке (см. пример 5.3), показывает, что при малых различиях модулей корней способ деквадрирования заметно уступает в точности методу Энке, причем могут быть получены и ошибочные значения.

Таким образом, вычисление комплексных корней способом деквадрирования целесообразно производить при большом различии между модулями корней.

Если модули комплексных корней уравнения близки или равны, то, как показано в [2], эффективным способом обеспечения большого различия между модулями является способ разложения уравнения по степеням двучлена (см. § 4). Величина параметра разложения, как и ранее, должна быть приблизительно равна $a_0^{1/n}$, а знак в схеме Горнера – соответствовать знаку при коэффициенте a_{n-1} заданного уравнения.

К изложенному в работе [2] необходимо сделать одно существенное дополнение. Если модули комплексных корней равны, то, как показано ниже, производить разложение уравнения нецелесообразно. Без разложения такие уравнения решаются быстрее и точнее.

П р и м е р 6.3. Решить уравнение

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0\,.$$

Р е ш е н и е. После разложения заданного уравнения по степеням $x = y - 1$ получим уравнение $y^6 - 5y^5 + 11y^4 - 13y^3 + 9y^2 - 3y + 1 = 0$.

В результате квадрирования будет получена следующая информация о знаках коэффициентов этого уравнения:

m	a_{im}						
	a_{6m}	a_{5m}	a_{4m}	a_{3m}	a_{2m}	a_{1m}	a_{0m}
1	+	+	+	−	+	−	+
2	+	−	+	−	+	+	+
3	+	−	+	+	+	−	+
4	+	+	+	−	+	−	+
5	+	−	+	−	+	+	+
6	+	−	+	+	+	−	+
7	+	+	+	−	+	−	+

Анализ изменения знаков коэффициентов показывает, что данное уравнение распадается на три квадратных равнения с комплексными корнями с квадратами модулей, равными $r_1^2 = 0{,}19806226$; $r_2^2 = 1{,}5549581$; $r_3^2 = 3{,}2469795$. Поскольку модули существенно отличаются друг от друга, примéним способ деквадрирования уравнений:

$$a_{27}z^2 + a_{17}z + a_{07} = 0\,, \tag{6.6}$$

$$a_{47}z^2 + a_{37}z + a_{27} = 0\,, \tag{6.7}$$

$$a_{67}z^2 + a_{57}z + a_{47} = 0\,. \tag{6.8}$$

В результате деквадрирования этих уравнений находим

– для **(6.6)** $\alpha_{1y} = 0{,}09903113$; $\beta_1 = 0{,}43388374$;
– для **(6.7)** $\alpha_{2y} = 0{,}77747905$; $\beta_2 = 0{,}97492789$;
– для **(6.8)** $\alpha_{3y} = 1{,}6234898$; $\beta_3 = 0{,}78183163$.

Следовательно, действительные части комплексных корней заданного уравнения таковы:

$$\alpha_1 = \alpha_{1y} - 1 = -0{,}9009689\,;$$
$$\alpha_2 = \alpha_{2y} - 1 = -0{,}222521\,;$$
$$\alpha_3 = \alpha_{3y} - 1 = -0{,}6234898\,.$$

О высокой точности вычислений свидетельствуют результаты проверочных расчетов:

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 1{,}0000002\,;$$

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} = 1{,}0000001\,; \quad \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} = 0{,}99999994\,; \quad \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2} = 1{,}0000001\,.$$

Истинные значения вычисляемых величин равны 1.

Серьезным недостатком метода деквадрирования является ограниченность области его применения. Как уже отмечалось, различие между модулями пар комплексных корней должно быть велико. Кроме того, при использовании метода деквадрирования необходима информация о знаках коэффициентов уравнения в каждом цикле квадрирования.

§ 7. Теоремы о коэффициентах алгебраических уравнений, имеющих корни с равными модулями. Способ расширения области применения формул Энке

7.1. Теоремы о коэффициентах алгебраических уравнений, имеющих действительные и комплексные корни с равными модулями. А.Н. Крылов [2] отмечает, что при использовании метода Лобачевского «самый невыгодный случай тот, когда имеется несколько пар мнимых корней, имеющих равные модули». Суждения по этому вопросу других авторов аналогичны. В частности, в [6] отмечается: «Метод Лобачевского хорошо работает, если уравнение имеет только действительные корни и не имеет корней равных или близких по абсолютной величине».

Способы решения уравнений, имеющих близкие корни, изложены выше. Исследуем уравнения, имеющие действительные и комплексные корни с равными модулями.

Т е о р е м а 1. *Между коэффициентами алгебраических уравнений, имеющих действительные или комплексные корни с равными модулями* r*, имеют место соотношения*

$$r = \left(\frac{a_0}{a_n}\right)^{1/n} = \left(\frac{a_1}{a_{n-1}}\right)^{1/(n-2)} = \left(\frac{a_2}{a_{n-2}}\right)^{1/(n-2)} = \ldots, \qquad \textbf{(7.1)}$$

которые в наглядной форме для уравнений 4-й и 7-й степеней можно представить следующим образом:

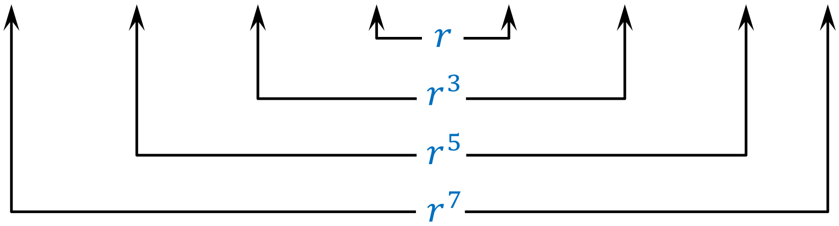
$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

а)

r^2

r^4

б) $a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$



В соотношении **(7.1)** *соответствующие пары коэффициентов должны иметь одинаковые знаки.*

Доказательство. Заданное уравнение четной степени представим как произведение трехчленов, корнями которых являются комплексно-сопряженные или действительные корни с модулями $r_1,\ r_2,\ \dots,\ r_{n/2}$:

$$
\begin{aligned}
x^2 + t_1x + r_1^2 &= 0\,,\\
x^2 + t_2x + r_2^2 &= 0\,,\\
&\cdots\cdots\\
x^2 + t_{n/2}x + r_{n/2}^2 &= 0\,.
\end{aligned}
\qquad \textbf{(7.2)}
$$

Выразим коэффициенты заданного уравнения $f(x)$ с $a_n = 1$ через коэффициенты трехчленов **(7.2)**:

$$
f(x) = \left(x^2 + t_1x + r_1^2\right)\left(x^2 + t_2x + r_2^2\right)\dots\left(x^2 + t_{n/2}x + r_{n/2}^2\right) =
$$
$$
= x^n + \left(t_1 + t_2 + \dots + t_{n/2}\right)x^{n-1} + \dots +
$$
$$
+\left(t_1r_2^2r_3^2\dots r_{n/2}^2 + t_2r_1^2r_3^2\dots r_{n/2}^2 + \dots + t_{n/2}r_1^2r_2^2\dots r_{(n/2)-1}^2\right)x + r_1^2r_2^2\dots r_{n/2}^2 = 0\,.
$$

По условию $r_1 = r_2 = \dots = r_{n/2} = r$. Поэтому

$$
f(x) = x^n + \left(t_1 + t_2 + \dots + t_{n/2}\right)x^{n-1} + \dots + r^{n-2}\left(t_1 + t_2 + \dots + t_{n/2}\right)x + r^n = 0\,.
$$

Учитывая принятые выше обозначения коэффициентов уравнений, получим

$$
\frac{a_0}{a_n} = r^n\,, \quad \frac{a_1}{a_{n-1}} = r^{n-2}\,, \quad \frac{a_2}{a_{n-2}} = r^{n-4}\,, \quad \dots,
$$

что равнозначно соотношениям **(7.1)**.

Совершенно аналогично можно показать, что соотношения **(7.1)** справедливы и при нечетной степени уравнения.

Из теоремы 1 можно сделать следующие выводы.

Следствие 1. *Корнями трехчленов* **(7.2)** *могут быть также корни* z_i *квадрированных уравнений. Вследствие этого после квадрирования соотношения* **(7.1)** *между коэффициентами уравнения, с учетом возведения корней в степень* $N = 2^m$, *сохраняются:*

$$
r = \left(\frac{a_{0m}}{a_{nm}}\right)^{1/Nn} = \left(\frac{a_{1m}}{a_{n-1;m}}\right)^{1/N(n-2)} = \left(\frac{a_{2m}}{a_{n-2;m}}\right)^{1/N(n-4)} = \dots \qquad \textbf{(7.3)}
$$

Следствие 2. *Если алгебраическое уравнение содержит несколько корней с одинаковыми модулями, равными* r_1, *и несколько корней, также действительных или комплексных, с модулями, равными* r_2, *то после квадрирования это уравнение* *распадается на два независимых уравнения, коэффициенты которых удовлетворяют соотношениям* **(7.3)**.

Предположим, что уравнение имеет три корня с равными модулями r_1 и четыре корня с равными модулями r_2. После квадрирования соотношения между коэффициентами этого уравнения будут следующими:

1) при $r_1 > r_2$:

$$a_{7m}z^3 + a_{6m}z^2 + a_{5m}z + a_{4m}y^4 + a_{3m}y^3 + a_{2m}y^2 + a_{1m}y + a_{0m} = 0$$

$$r_1^{\frac{1}{1N}} \qquad r_2^{\frac{1}{2N}} \qquad r_1^{\frac{1}{3N}} \qquad r_2^{\frac{1}{4N}}$$

2) при $r_1 < r_2$:

$$a_{7m}y^4 + a_{6m}y^3 + a_{5m}y^2 + a_{4m}y + a_{3m}z^3 + a_{2m}z^2 + a_{1m}z + a_{0m} = 0$$

$$r_2^{\frac{1}{2N}} \qquad r_1^{\frac{1}{4N}} \qquad r_2^{\frac{1}{4N}} \qquad r_1^{\frac{1}{2N}}$$

Весьма важно, что приведенные соотношения **(7.3)** между коэффициентами квадрированного уравнения выполняются с высокой точностью. Сигналом для проверки соотношений **(7.1)**, **(7.3)** является наличие приближенного равенства между условными (вычисленными при условии, что все корни являются действительными) значениями модулей.

Т е о р е м а 2. *Коэффициенты алгебраического уравнения 4-й степени с комплексными корнями, имеющими разные модули, но одинаковые действительные и мнимые части, удовлетворяют соотношениям* **(7.1)**.

Коэффициенты уравнений 6-й и более высоких степеней с аналогичными корнями этим соотношениям не удовлетворяют.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение 4-й степени с комплексными корнями имеет два трехчлена. Если $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, то $r_1^2 = 2\alpha_1^2$, $r_2^2 = 2\alpha_2^2$. Следовательно,

$$f(x) = (x^2 + 2\alpha_1 x + 2\alpha_1^2)(x^2 + 2\alpha_2 x + 2\alpha_2^2) =$$
$$= x^4 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)x^3 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)x^2 + 4\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)x + 4\alpha_1^2\alpha_2^2 = 0\,.$$

Таким образом, $\dfrac{a_0}{a_4} = 4\alpha_1^2\alpha_2^2 = r_1^2 r_2^2\,,\quad \dfrac{a_1}{a_3} = 2\alpha_1\alpha_2 = r_1 r_2\,.$

Следовательно, $r = \sqrt{r_1 r_2} = \left(\dfrac{a_0}{a_4}\right)^{1/4} = \left(\dfrac{a_1}{a_3}\right)^{1/2}.$

что соответствует **(7.1)**. Аналогичным образом можно убедиться в том, что уравнение 6-й и более высоких степеней с комплексными корнями, имеющими равные действительные и мнимые части, соотношениям **(7.1)** не удовлетворяют.

Т е о р е м а 3. *Если алгебраические уравнения четной степени n, имеющие корни с равными модулями r, содержат также действительные корни, равные $\pm r$, то $a_{n/2} = 0$.*

Докажем теорему для простейшего случая – уравнения 4-й степени. Коэффициент a_2 такого уравнения выражается так:

$$a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 .$$

Если $x_1 = -x_2$, а знаки корней x_3 и x_4 одинаковы, выражение для a_2 целесообразно записать в виде

$$a_2 = x_1x_2 + x_1(x_3 + x_4) + x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4 .$$

Поскольку модули всех корней одинаковы, то $|x_1x_2| = |x_3x_4|$, а знаки этих произведений противоположны по условию. Равна нулю и сумма средних слагаемых. Следовательно, $a_2 = 0$.

Теорема 1 и следствия 1, 2 позволяют объяснить и устранить причину, вследствие которой некоторые формулы Виета и уравнения Энке при наличии в уравнении комплексных корней с равными модулями непригодны.

В известных работах [2, 5, 7] для решения уравнений рекомендуется использовать следующие формулы Виета:

$$\begin{gathered} \frac{a_{n-1}}{a_n} = \psi_n(x_i)\,, \quad \frac{a_1}{a_n} = \psi_1(x_i)\,. \\ \frac{a_{n-1;1}}{a_{n;1}} = \psi_{n;1}\left(x_i^2\right), \quad \frac{a_{1;1}}{a_{n;1}} = \psi_{1;1}\left(x_i^2\right). \end{gathered} \qquad \textbf{(7.4)}$$

поскольку при их использовании получаются более простые аналитические зависимости, чем при использовании других формул Виета. Однако при наличии в уравнении корней с равными модулями коэффициенты a_{n-1} и a_1; $a_{n-1;1}$ и $a_{1;1}$; a_{n-2} и a_2, а также ряд других пар, согласно теореме 1, отличаются друг от друга на постоянную величину. В связи с этим системы уравнений Виета **(7.4)** содержат равносильные уравнения, и решить заданное уравнение с их помощью нельзя. Это замечание в равной мере касается и уравнений Энке.

Таким образом, для решения алгебраических уравнений, имеющих корни не только с разными, но и с одинаковыми модулями, необходимо использовать формулы Виета, связывающие корни с независимыми во всех случаях коэффициентами a_{n-1} , a_{n-2} , … , $a_{n/2}$.

Теорема 1, как показано ниже, позволяет также обосновать алгоритм преобразования заданного уравнения с корнями, имеющими равные модули, в такое уравнение, которое можно решить с помощью формул Энке, причем одновременно определить все комплексные корни.

7.2. Способ расширения области применения формул Энке. Выше изложены различные способы анализа и определения корней алгебраического уравнения, которые целесообразно использовать совместно с методом Лобачевского для расширения диапазона его применения, повышения точности и упрощения алгоритма. Выбор тех или иных способов зависит от степени решаемого уравнения и типа его корней (см. § 10).

Если модули комплексных корней равны (например, в уравнении 4-й степени), то формулы типа **(5.6а)** после подстановки значений коэффициентов дают неопределенность вида $0/0$.

Для решения таких уравнений способом Энке эти уравнения необходимо преобразовать путем умножения на двучлен $x^2 - 1$ или $x^2 + 1$. Алгоритм такого преобразования предельно прост: коэффициенты уравнения записываются в строку, а затем со сдвигом на две позиции записываются эти же коэффициенты со своими знаками или с противоположными (для уравнений с равными коэффициентами). После этого соответствующие слагаемые суммируются, образуя ряд коэффициентов преобразованного уравнения:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_2 & a_1 & a_0 & & \\
 & & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \ldots\ldots\ldots & & a_2 & a_1 & a_0 \\
\hline
a_n & a_{n-1} & (a_n + a_{n-2}) & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & (a_2 + a_0) & a_1 & a_0
\end{array}$$

Преобразованное уравнение решается так же, как и заданное.

П р и м е р 7.1. Решить уравнение

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0\,.$$

Р е ш е н и е. Коэффициенты уравнения удовлетворяют соотношениям **(7.1)** и равны. Следовательно, умножаем заданное уравнение на двучлен $x^2 - 1$:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1
\end{array}$$

Преобразованное уравнение имеет вид

$$x^6 + x^5 - x - 1 = 0\,.$$

Коэффициенты уравнения **(5.8)** для преобразованного уравнения таковы: $\gamma = 2$; $\gamma_1 = 2$; $\gamma_2 = 0$. Следовательно, уравнение Энке **(5.8)** имеет вид $2t^2 - 2t - 2 = 0$, т.е. $t^2 - t - 1 = 0$. Корни этого уравнения:

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}\,; \quad \alpha_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\,.$$

Поскольку модуль определен безошибочно, погрешности определения корней равны нулю.

П р и м е р 7.2. Решить уравнение

$$x^6 - 5{,}828427x^5 + 19{,}48528x^4 - 40{,}627416x^3 + 58{,}455843x^2 - \\ - 52{,}455843x + 27 = 0\,.$$

Р е ш е н и е. Коэффициенты уравнения удовлетворяют соотношениям **(7.1)**. Преобразуем заданное уравнение путем умножения его на двучлен $x^2 + 1$:

$$x^8 - 5{,}828427x^7 + 20{,}485281x^6 - 46{,}455843x^5 + 77{,}941124x^4 - \\ - 93{,}083259x^3 + 85{,}455843x^2 - 52{,}455843x + 27 = 0\,.$$

Коэффициенты уравнения Энке: $\gamma = 0{,}6666667$; $\gamma_1 = -3{,}885618$; $\gamma_2 = 10{,}990187$; $\gamma_3 = -15{,}42809$. Следовательно, уравнение Энке **(5.8)** имеет вид

$$0{,}6666667t^3 + 3{,}885618t^2 + 6{,}990187t + 3{,}771236 = 0\,.$$

Методом Лобачевского определяем корни этого уравнения: $t_3 = 2{,}8284271$; $t_2 = 2$; $t_1 = 1{,}0000002$. Следовательно, $\alpha_3 = 1{,}4142135$; $\alpha_2 = 1$; $\alpha_1 = 0{,}5000001$. Невязка коэффициента a_5 составляет менее 10^{-7}.

§ 8. Уравнения, сопряженные с заданными уравнениями

В настоящей книге для заданных уравнений сопряженными называются такие уравнения, корнями которых являются действительные части комплексных корней или действительные корни с равными модулями.

Для уравнений **(2.1)** 4-й степени с комплексными корнями имеют место следующие формулы Виета:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{1}{2}\frac{a_3}{a_4}, \qquad r_1^2 + r_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2 = -\frac{a_2}{a_4}. \tag{8.1}$$

Исходя из них, можно получить сопряженное уравнение (справедливое при условии $a_4 = 1$):

$$\alpha^2 + \frac{1}{2}a_3\alpha + \frac{1}{4}(a_2 - r_1^2 - r_2^2) = 0\,. \tag{8.2}$$

Из структуры уравнения **(8.2)** видно, что его можно использовать как при одинаковых, так и при разных значениях модулей корней.

С помощью сопряженного уравнения **(8.2)** можно вычислять также действительные корни, если определены знаки и величи́ны произведений пар модулей этих корней.

Действительно, при указанных условиях заданное уравнение 4-й степени можно разложить на два квадратных уравнения **(5.4)**, коэффициенты t которых определяются (при $a_4 = 1$) с помощью уравнения

$$t^2 + a_3 t + (a_2 - r_1^2 - r_2^2) = 0\,, \tag{8.2a}$$

где $r_1^2 = x_1x_2$, $r_2^2 = x_3x_4$.

Комплексные корни **(2.1)** уравнения 6-й степени связаны с его независимыми коэффициентами формулами Виета ($a_6 = 1$):

$$\begin{gathered} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{1}{2}a_5\,, \\ 4\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 + 4\alpha_2\alpha_3 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = a_4\,, \\ 2\alpha_1(r_2^2 + r_3^2) + 2\alpha_2(r_1^2 + r_3^2) + 2\alpha_3(r_1^2 + r_2^2) + 8\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -a_3\,. \end{gathered} \tag{8.3}$$

Если $r_1 = r_2 = r_3 = r$, то уравнения **(8.3)** преобразуются в сопряженное уравнение:

$$\alpha^3 + \frac{1}{2}a_5\alpha^2 + \frac{1}{4}(a_4 - 3r^2)\alpha + \frac{1}{8}(a_3 - 2r^2a_5) = 0\,. \tag{8.4}$$

Сопряженное уравнение **(8.4)** можно решить методом Лобачевского или любым другим известным методом, так как с помощью соотношений **(7.1)** заданное уравнение с корнями, имеющими равные модули, опознаётся, а модули вычисляются.

Сопряженное уравнение **(8.4)** и уравнения более высоких степеней, полученные ниже, можно использовать и для решения уравнений четной степени с действительными корнями, имеющими одинаковые модули и знаки. Если же часть действительных корней имеет разные знаки, то сопряженные уравнения использовать нельзя. Опознавательным признаком наличия в заданном уравнении w пар корней с равными модулями, но разными знаками, является равенство нулю w-коэффициентов $a_n \div a_{n/2}$ или $a_{n/2} \div a_0$. Использование этого признака позволяет, совместно с соотношением **(7.1)**, определить корни уравнения.

При решении уравнений с нечетными степенями, имеющими корни с равными модулями, необходимо учитывать, что по крайней мере один корень является действительным. Его величина вычисляется также с помощью соотношения **(7.1)**. Определив знак и исключив этот корень из заданного уравнения, можно, таким образом, привести любое уравнение нечетной степени к четной, для которых возможно получение сопряженных уравнений.

Если уравнение имеет три пары комплексных корней, из которых две пары имеют модули, равные r_1, а третья пара – модули, равные r_2, то в этом случае сопряженное уравнение имеет вид

$$\alpha^3 + \frac{1}{2}a_5\alpha^2 + \frac{1}{4}(a_4 - 2r_1^2 - r_2^2)\alpha + \frac{1}{8}\left(a_3 - r_1^2 a_5 - \frac{a_1}{r_1^2}\right) = 0\,. \qquad \textbf{(8.5)}$$

Для заданных уравнений **(2.1)** степени $n \geq 8$ сопряженные уравнения получены при условии, что модули всех корней одинаковы. При $n = 8$ и $a_8 = 1$ имеют место следующие формулы Виета:

$$\begin{gathered}
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -\frac{1}{2}a_7\,,\\
\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 + r^2 = \frac{1}{4}a_6\,,\\
6r^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + 8(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4) = -a_5\,,\\
6r^2 + 8r^2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4) + 16\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = a_4\,.
\end{gathered} \qquad \textbf{(8.6)}$$

После соответствующих преобразований уравнений **(8.6)** получается сопряженное уравнение

$$\alpha^4 + \frac{1}{2}a_7\alpha^3 + \frac{1}{4}(a_6 - 4r^2)\alpha^2 + \frac{1}{8}(a_5 - 3r^2 a_7)\alpha + \frac{1}{16}(a_4 - 2r^2 a_6 + 2r^4) = 0\,. \qquad \textbf{(8.7)}$$

Сопоставление структуры соответствующих коэффициентов полученных сопряженных уравнений **(8.2)**, **(8.4)**, **(8.7)** позволяет, не проводя весьма громоздких преобразований формул Виета, для уравнений с $n \geq 10$ получить сопряженные уравнения 5÷7-й и более высоких степеней.

Продемонстрируем этот способ на примере определения коэффициентов сопряженного уравнения 5-й степени.

Исходя из структуры уже полученных сопряженных уравнений, можно предположить, что сопряженное уравнение 5-й степени для заданного уравнения **(2.1)** 10-й степени будет следующим:

$$\alpha^5 + \frac{1}{2}a_9\alpha^4 + \frac{1}{4}(a_8 - 5r^2)\alpha^3 + \frac{1}{8}(a_7 - 4r^2a_9)\alpha^2 + \\ + \frac{1}{16}(a_6 - 3r^2a_8 + wr^4)\alpha + \frac{1}{32}(a_5 - 2r^2a_7 + zr^4a_9) = 0\,, \qquad \textbf{(8.8)}$$

где w и z – неизвестные коэффициенты.

Уравнение **(8.8)** представим в форме

$$\alpha^5 + b_4\alpha^4 + b_3\alpha^3 + b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0 = 0\,. \qquad \textbf{(8.8a)}$$

Коэффициенты w и z можно определить в том случае, если окажется возможным для какого-либо уравнения 10-й степени найти коэффициенты b_1 и b_0 сопряженного ему уравнения **(8.8a)**.

Выберем в качестве заданного уравнение 10-й степени с корнями $x_1 = x_2 = \ldots = x_{10} = r = 1$, так как такие действительные корни являются частным случаем комплексных корней, у которых мнимые части равны нулю:

$$x^{10} - 10x^9 + 45x^8 - 120x^7 + 210x^6 - 252x^5 + 210x^4 - 120x^3 + \\ + 45x^2 - 10x + 1 = 0\,. \qquad \textbf{(8.9)}$$

Корни сопряженного уравнения известны: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_5 = 1$. Следовательно, само уравнение имеет вид

$$\alpha^5 - 5\alpha^4 + 10\alpha^3 - 10\alpha^2 + 5\alpha - 1 = 0\,. \qquad \textbf{(8.10)}$$

Приравняв коэффициенты при α и свободные члены уравнений **(8.8)** и **(8.10)**, получим уравнения

$$\frac{1}{16}(a_6 - 3a_8 + w) = 5\,, \\ \frac{1}{32}(a_5 - 2a_7 + za_9) = -1\,, \qquad \textbf{(8.11)}$$

из которых находим

$$w = 3a_8 - a_6 + 5\cdot 16 = 3\cdot 45 - 210 + 80 = 5\,,$$

$$z = \frac{2a_7 - a_5 - 32}{a_9} = \frac{2(-120) + 252 - 32}{-10} = 2\,.$$

Сопряженные уравнения имеют вид:

а) для уравнений **(2.1)** 10-й степени

$$\alpha^5 + \frac{1}{2}a_9\alpha^4 + \frac{1}{4}(a_8 - 5r^2)\alpha^3 + \frac{1}{8}(a_7 - 4r^2a_9)\alpha^2 + \\ + \frac{1}{16}(a_6 - 3r^2a_8 + 5r^4)\alpha + \frac{1}{32}(a_5 - 2r^2a_7 + 2r^4a_9) = 0\,; \qquad \textbf{(8.12)}$$

б) для уравнений **(2.1)** 12-й степени

$$\alpha^6 + \frac{1}{2}a_{11}\alpha^5 + \frac{1}{4}(a_{10} - 6r^2)\alpha^4 + \frac{1}{8}(a_9 - 5r^2a_{11})\alpha^3 + \\ + \frac{1}{16}(a_8 - 4r^2a_{10} + 9r^4)\alpha^2 + \frac{1}{32}(a_7 - 3r^2a_9 + 5r^4a_{11})\alpha + \\ + \frac{1}{64}(a_0 - 2r^2a_8 + 2r^4a_{10} - 2r^6) = 0\,; \qquad \textbf{(8.13)}$$

в) для уравнений **(2.1)** 14-й степени

$$\alpha^7+\frac{1}{2}a_{13}\alpha^6+\frac{1}{4}(a_{12}-7r^2)\alpha^5+\frac{1}{8}(a_{11}-6r^2a_{13})\alpha^4+$$
$$+\frac{1}{16}(a_{10}-5r^2a_{12}+14r^4)\alpha^3+\frac{1}{32}(a_9-4r^2a_{11}+9r^4a_{13})\alpha^2+$$
$$+\frac{1}{64}(a_8-3r^2a_{10}+5r^4a_{12}-7r^6)\alpha+$$
$$+\frac{1}{128}(a_7-2r^2a_9+2r^4a_{11}-2r^6a_{13})=0\,. \tag{8.14}$$

Как уже отмечалось, сопряженные уравнения могут быть решены не только методом Лобачевского, но и любым другим способом.

П р и м е р 8.1. Решить уравнение

$$x^4-4{,}828427x^3+9{,}656854x^2-9{,}656854x+4=0.$$

Р е ш е н и е. В результате квадрирования заданного уравнения вычислены следующие предварительные (условные) значения модулей (при $m=7$):

$$x_1=1{,}3989878\,;\quad x_2=1{,}409721\,;\quad x_3=1{,}4187094\,;\quad x_4=1{,}429608\,.$$

Поскольку модули корней близки, проверяем выполнение соотношений **(7.1)**:

$$\left(\frac{4}{1}\right)^{1/4}=\left(\frac{9{,}656854}{4{,}828427}\right)^{1/2}=\sqrt{2}\,.$$

Соотношение **(7.1)** выполняется. Следовательно, модули корней равны $\sqrt{2}$. Сопряженное уравнение **(8.2)** в данном случае имеет вид

$$\alpha^2-2{,}4142135\alpha+1{,}4142135=0\,.$$

Его корни: $\alpha_1=1$; $\alpha_2=1{,}4142135$. Следовательно, корни заданного уравнения определены практически ошибочно:

$$x_{1,2}=1\pm j\cdot 1\,;\quad x_{3,4}=1{,}4142135\,,$$

(так как мнимая часть корней x_3 и x_4 равна нулю).

Если проверку соотношения **(7.1)** произвести до начала квадрирования, то при решении данного уравнения оно не требуется.

П р и м е р 8.2. Решить уравнение

$$x^4+2x^3-2x-1=0\,.$$

Р е ш е н и е. Коэффициенты уравнения удовлетворяют соотношениям **(7.1)**, а коэффициент a_2, кроме того, равен нулю. Следовательно, в соответствии с теоремой 3, уравнение имеет два действительных корня $x_1=1$, $x_2=-1$. Разделив заданное уравнение на двучлен x^2-1 и решив полученное квадратное уравнение, определим два других корня: $x_3=x_4=-1$.

Необходимо отметить, что вопреки общепринятому мнению, заданное уравнение можно решить и непосредственно методом Лобачевского. Действительно, после 1-го цикла квадрирования получается уравнение

$$x^4+4x^3+6x^2+4x+1=0\,,$$

которое в последующих циклах не меняется.

Предположим, что, несмотря на это, квадрирование было продолжено до $m = 50$. При этом $N = 2^{50} = 1{,}125 \cdot 10^{15}$. Следовательно, модули корней заданного уравнения таковы:

$$x_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/N} = 1\,, \quad x_2 = \left(\frac{4}{6}\right)^{1/N} = 1\,, \quad x_3 = \left(\frac{6}{4}\right)^{1/N} = 1\,, \quad x_4 = \left(\frac{4}{1}\right)^{1/N} = 1\,.$$

П р и м е р 8.3. Решить уравнение

$$x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0\,.$$

Р е ш е н и е. Корни уравнения удовлетворяют соотношениям **(7.1)**.

Поскольку степень уравнения нечетная, оно имеет по крайней мере один действительный корень, модуль которого равен 1, а знак – отрицательный. Исключив этот корень, получим новое уравнение

$$x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0\,.$$

Подставив коэффициенты этого уравнения в сопряженное уравнение **(8.4)**, получим уравнение $\alpha^3 + 0{,}5\alpha = 0$, имеющее корни $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \sqrt{0{,}5}$, $\alpha_3 = -\sqrt{0{,}5}$.

Таким образом, корни заданного уравнения будут вычислены безошибочно:

$$x_1 = -1\,; \quad x_2 = j\,; \quad x_3 = -j\,; \quad x_{4,5} = \sqrt{0{,}5} \pm j \cdot \sqrt{0{,}5}\,; \quad x_{5,6} = -0{,}5 \pm j \cdot \sqrt{0{,}5}\,.$$

П р и м е р 8.4. Решить уравнение

$$x^6 - 5{,}828427x^5 + 19{,}48528x^4 - 40{,}627416x^3 + 58{,}455843x^2 - \\ - 52{,}455843x + 27 = 0\,.$$

Р е ш е н и е. После 6-ти циклов квадрирования обнаружим, что условные значения модулей корней близки. Поэтому проверим выполнение соотношения **(7.1)**:

$$\left(\frac{a_0}{a_6}\right)^{1/6} = 1{,}7320508\,; \quad \left(\frac{a_1}{a_5}\right)^{1/4} = 1{,}7320508\,; \quad \left(\frac{a_2}{a_4}\right)^{1/2} = 1{,}7320508\,.$$

Соотношения **(7.1)** выполняются. Если бы эта проверка была произведена до решения уравнения, то квадрирование оказалось бы ненужным.

Составляем сопряженное уравнение

$$\alpha^3 - 2{,}9142135\alpha^2 + 2{,}6213202\alpha - 0{,}70710675 = 0\,.$$

После 6-ти циклов квадрирования сопряженного уравнения определим модули его корней: $\alpha_1 = 1{,}4142136$; $\alpha_2 = 0{,}9999998$; $\alpha_3 = 0{,}5000005$. Для проверки точности расчетов вычислим $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = -5{,}8284266$, что с высокой точностью совпадает со значением коэффициента a_5 заданного уравнения. Вот вычисленные корни исходного уравнения:

$$x_{1,2} = 1{,}4142136 \pm j \cdot 1\,; \quad x_{3,4} = 0{,}9999998 \pm j \cdot 1{,}4142137\,;$$
$$x_{5,6} = 0{,}5000005 \pm j \cdot 1{,}6583122\,.$$

Истинные значения корней:

$$x_{1,2} = \sqrt{2} \pm j\,; \quad x_{3,4} = 1 \pm j \cdot \sqrt{2}\,; \quad x_{5,6} = 0{,}5 \pm j \cdot \sqrt{2{,}75}\,.$$

П р и м е р 8.5. Решить уравнение

$$x^{14} - 4{,}5144232x^{13} + 14{,}760009x^{12} - 38{,}836491x^{11} + 93{,}2654x^{10} -$$
$$- 198{,}58125x^{9} + 388{,}2677x^{8} - 692{,}61131x^{7} + 1164{,}8032x^{6} - 1787{,}2307x^{5} +$$
$$+ 2518{,}1665x^{4} - 3145{,}7547x^{3} + 3583{,}6828x^{2} - 3291{,}0144x + 2187 = 0\,.$$

Р е ш е н и е. Коэффициенты заданного уравнения удовлетворяют соотношениям

$$\sqrt{3} = \left(\frac{2187}{1}\right)^{1/14} = \left(\frac{3291{,}0144}{4{,}5144232}\right)^{1/12} = \left(\frac{3586{,}6828}{14{,}760009}\right)^{1/10} = \ldots$$

Следовательно, уравнение имеет корни с одним и тем же модулем $r = \sqrt{3}$. Подставим численные значения коэффициентов и модулей в сопряженное уравнение **(8.14)**:

$$\alpha^{7} - 2{,}2572116\alpha^{6} - 1{,}5599977\alpha^{5} + 5{,}3028907\alpha^{4} - 0{,}13312062\alpha^{3} -$$
$$- 3{,}0691131\alpha^{2} + 0{,}37624218\alpha + 0{,}34061109 = 0\,.$$

Решим это уравнение методом Лобачевского. После 7-ми циклов квадрирования определим модули корней сопряженного уравнения:

$$\alpha_7 = 1{,}6583167\,; \quad \alpha_6 = 1{,}4142006\,; \quad \alpha_5 = 1{,}2247585\,; \quad \alpha_4 = 0{,}0999993\,;$$
$$\alpha_3 = 0{,}79057076\,; \quad \alpha_2 = 0{,}5000007\,; \quad \alpha_1 = 0{,}30000034\,.$$

Истинные значения модулей:

$$\alpha_7 = 1{,}6583123\,; \quad \alpha_6 = 1{,}4142135\,; \quad \alpha_5 = 1{,}2247448\,; \quad \alpha_4 = 1{,}0000000\,;$$
$$\alpha_3 = 0{,}7905694\,; \quad \alpha_2 = 0{,}5000000\,; \quad \alpha_1 = 0{,}3000000\,.$$

Модули корней заданного уравнения определены безошибочно. Поэтому оно решено с высокой точностью, причем корни сопряженного уравнения являются действительными частями комплексных корней заданного уравнения.

П р и м е р 8.6. Решить уравнение

$$x^{7} + 5x^{6} + 3x^{5} - 17x^{4} - 16x^{3} + 24x^{2} - 16x - 16 = 0\,.$$

Р е ш е н и е. В результате квадрирования уравнения определим, что коэффициенты во всех циклах положительны. Это означает, что корни уравнения являются действительными.

Условные модули корней:

$$x_1 = 0{,}98298076\,; \quad x_2 = 0{,}9999998\,; \quad x_3 = 1{,}0173141\,; \quad x_4 = 1{,}9571455\,;$$
$$x_5 = 1{,}9873655\,; \quad x_6 = 2{,}012715\,; \quad x_7 = 2{,}0437937\,.$$

Первые три модуля и четыре последующих близки между собой. Поэтому проверяем соотношения **(7.3)** между коэффициентами квадрированного уравнения, индексы которых указаны ниже:

7 6 5 4 3 2 1 0

$r_2^2 = 4{,}0000003$ $\qquad$ $r_1^2 = 0{,}9999998$

$r_2^4 = 16{,}000005$ $\qquad$ $r_1^4 = 1{,}0000000$

Действия оператора при этом ничем не отличаются от его действий при вычислении условных модулей. Так, для определения отношения коэффициентов $(a_{4m}/a_{6m})^{1/N}$ необходимо нажать на клавиши ИП, 4, ИП, 6, С/П.

Из приведенных выше отношений коэффициентов следует, что корни $x_1 \div x_3$ и $x_4 \div x_7$ имеют модули, равные соответственно 1 и 2. Определив знаки модулей, находим $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; $x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = -2$.

Решим уравнения, имеющие корни различных типов – действительные, комплексные, с одинаковыми и разными модулями.

Пример 8.7. Решить уравнение

$$x^7 - 4{,}51x^6 - 14{,}995x^5 + 74{,}67x^4 + 16{,}935x^3 - 265{,}43x^2 + \\ + 408{,}93x - 144{,}36 = 0\,.$$

Решение. В результате квадрирования получим следующие данные о знаках коэффициентов:

m	a_{im}							
	a_{7m}	a_{6m}	a_{5m}	a_{4m}	a_{3m}	a_{2m}	a_{1m}	a_{0m}
1	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	+	+	–	+	+
3	+	+	+	+	+	+	+	+
4	+	+	+	+	+	+	+	+
5	+	+	+	+	+	+	+	+
6	+	+	+	+	+	+	+	+

Условные модули корней: $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 1{,}3989796$; $x_3 = 1{,}4296134$; $x_4 = 2{,}96767799$; $x_5 = 3{,}0326727$; $x_6 = 3{,}9616479$; $x_7 = 4{,}0488187$.

Модуль x_1 существенно отличается от остальных модулей. Поэтому полагаем, что он вычислен с высокой точностью и является действительным. Для уточнения значений других модулей необходимо решать квадратные квадрированные уравнения

$$a_{76}z^2 + a_{66}z + a_{56} = 0\,,$$
$$a_{56}z^2 + a_{46}z + a_{36} = 0\,,$$

имеющие действительные корни, а также квадратное квадрированное уравнение с комплексными корнями:

$$a_{36}z^2 + a_{26}z + a_{16} = 0\,.$$

Решая первые два квадратных уравнения обычным способом, определим их корни z_7, z_6, z_5, z_4, а затем извлечем корни N-й степени из полученных значений z_i. Таким образом, более точно, $x_4 = 2{,}9993491$; $x_5 = 3{,}0006515$; $x_6 = 3{,}999885$; $x_7 = 4{,}0101131$.

Уравнение с комплексными корнями решаем способом деквадрирования, поскольку условные модули x_2 и x_3 существенно отличаются от соседних условных модулей. В результате деквадрирования находим $\alpha_1 = 1{,}0000012$; $\beta = 0{,}99999878$. Определив знаки модулей, получим следующие значения корней:

$$x_1 = 0{,}5\,; \quad x_{2,3} = 1{,}0000012 \pm j \cdot 0{,}99999878\,; \quad x_4 = -2{,}9993491\,;$$
$$x_5 = -3{,}0006515\,; \quad x_6 = 3{,}9998851\,; \quad x_7 = 4{,}0101131\,.$$

Истинные значения корней заданного уравнения:

$$x_1 = 0{,}5\,; \quad x_{2,3} = 1 \pm j \cdot 1\,; \quad x_4 = x_5 = -3\,; \quad x_6 = 4{,}0\,; \quad x_7 = 4{,}01\,.$$

Пример 8.8. Решить уравнение [11]

$$x^6 - 15x^5 + 56x^4 - 56x^3 - 56x^2 + 172x - 120 = 0\,.$$

Решение. В результате квадрирования получена следующая информация о знаках коэффициентов:

m	a_{im}						
	a_{6m}	a_{5m}	a_{4m}	a_{3m}	a_{2m}	a_{1m}	a_{0m}
1	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	+	−	−	+	+
3	+	+	+	+	+	+	+
4	+	+	+	+	+	+	+
5	+	+	+	+	+	+	+

Условные модули корней: $x_1 = 1{,}3542558$; $x_2 = 1{,}3964068$; $x_3 = 1{,}432247$; $x_4 = 1{,}4768261$; $x_5 = 2{,}9999996$; $x_6 = 10$.

Поскольку модули x_5 и x_6 существенно отличаются один от другого и от других модулей, полагаем, что они вычислены с высокой точностью и являются действительными. Определив знаки и исключив корни x_5 и x_6 из заданного уравнения, получим новое уравнение

$$x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 4x - 4 = 0\,. \qquad \textbf{(8.15)}$$

Коэффициенты этого уравнения удовлетворяют соотношениям **(7.1)**, а средний коэффициент равен нулю. Следовательно, действительные корни таковы: $x_4 = -x_3 = \pm(4/1)^{1/4} = \sqrt{2}$. Действительные части сопряженных комплексных корней:

$$\alpha = -\frac{b_3}{2} - \sum_{i=1}^{2} x_i = 1\,,$$

где b_3 – соответствующий коэффициент уравнения **(8.15)**.

Таким образом, заданное уравнение имеет следующие корни, вычисленные практически точно:

$$x_{1,2} = 1 \pm j\,; \quad x_3 = -\sqrt{2}\,; \quad x_4 = \sqrt{2}\,; \quad x_5 = 2{,}9999996\,; \quad x_6 = 10\,.$$

§ 9. Решение алгебраических уравнений различных типов обобщенным (с двукратным квадрированием) методом Лобачевского

Рассмотренные выше новые и известные способы решения алгебраических уравнений позволяют повысить точность определения корней определенного вида или упростить алгоритм расчетов. Однако эти способы имеют существенный недостаток – ограниченность применения. Вследствие этого возникает необходимость тщательного анализа целесообразности применения того или иного способа и особенностей программирования соответствующих алгоритмов.

Выше было показано, что для повышения точности вычисления действительных корней с небольшим относительным различием модулей целесообразно использовать операцию разложения уравнения по степеням двучлена, а затем – квадрирование и определение модулей.

Особенно эффективно применение операции разложения уравнения по степеням двучлена в том случае, если параметр разложения выбран оптимальным. Однако для этого необходимо знание приближенных значений корней или их модулей. Таким образом, для высокоточного определения действительных корней уравнения необходимо квадрировать и определять модули корней дважды – до и после разложения уравнения по степеням суммы или разности.

Покажем, что подобное сочетание методов квадрирования и разложения заданного уравнения позволяет также с высокой точностью вычислить все комплексные корни алгебраического уравнения любой степени.

Разложение уравнения по степеням двучлена с параметром b означает смещение нуля отсчета действительных корней и действительных частей комплексных корней по оси α на указанную величину влево или вправо, в зависимости от знака параметра b, т.е. в точку O_1 или O_2 (рис. 2).

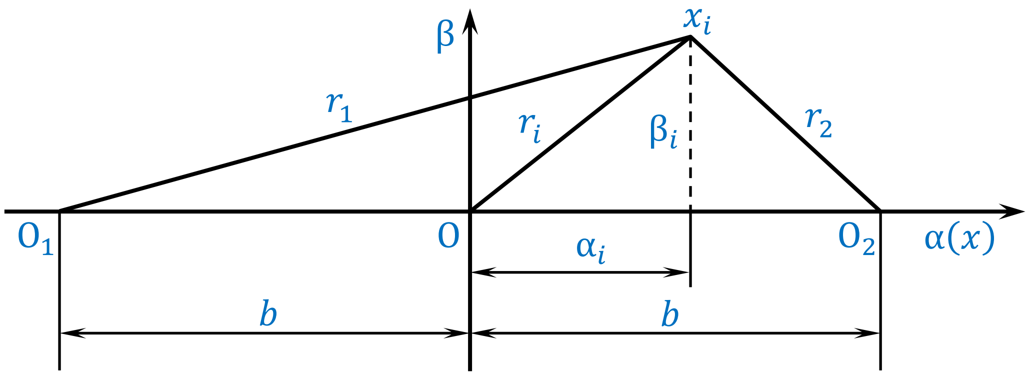


Рис. 2

Вычислим действительную часть α_i комплексного корня x_i по информации о величине и знаке параметра b, а также по информации о значениях модуля комплексного числа до разложения уравнения – r_i и после разложения – r_1 или r_2.

Из рис. 2 следует, что при $b > \alpha$

$$\beta_i^2 = r_i^2 - \alpha_i^2 = r_{1,2}^2 - (b \pm \alpha)^2 ,$$

т.е.

$$\alpha = \frac{r_i^2 - r_{1,2}^2 + b^2}{2b}. \qquad \textbf{(9.1)}$$

Аналогичное выражение имеет место и при $b < \alpha$. Весьма важно, что по формуле **(9.1)** определяется не только величина, но и знак действительной части α_i комплексного корня. Точность вычисления величины α_i, как следует из формулы **(9.1)**, зависит от ошибок вычисления модулей, определяемых дважды. Поскольку квадраты модулей вычитаются, ошибки вычисления модулей частично компенсируются, что обусловливает сравнительно высокую точность определения α даже при весьма малых значениях параметра b (см. пример 9.3).

За счет смещения нуля отсчета модулей действительных корней последние после разложения уравнения уменьшаются на величину b, если знак b совпадает со знаком корней, и увеличиваются при несовпадении знаков. Таким образом, одновременно с вычислением комплексных корней предложенный метод двукратного квадрирования позволяет определить модули и знаки действительных корней, отличать их от комплексных корней.

Модуль каждого корня определяется дважды. За основу целесообразно выбрать то значение, которое отличается от ближайших модулей на относительно бóльшую величину.

При реализации метода двукратного квадрирования возникает проблема отождествления значений каждого модуля действительных и комплексных корней, вычисленных до и после разложения уравнения.

Отождествление значений модуля каждого действительного корня не представляет затруднений из-за различия между ними на заданную величину b.

Сравнительно просто решается и задача отождествления модулей комплексных корней, если $n \leq 7$. При этом в затруднительных случаях целесообразно использовать метод проб с проверкой соотношения

$$a_{n-1} = -\sum^{i} x_i - 2\sum^{j} \alpha_j\,. \qquad \textbf{(9.2)}$$

В сложных случаях, при больших n, отождествление модулей целесообразно проводить по близости их значений, которая имеет место при разложении заданного уравнения по степеням двучлена с весьма малым значением параметра b. Однако при этом действительные части комплексных корней α_i вычисляются с ограниченной точностью. Поэтому после повторного разложения заданного уравнения с оптимальной величиной b вычисляются уточненные значения α_i комплексных корней (см. пример 9.3).

В том случае, если относительное различие модулей комплексных корней невелико (см. рис. 3, корни x_1 и x_2), за решаемое уравнение целесообразно выбрать не заданное уравнение, а уравнение, полученное после разложения по степеням двучлена. При смещении нуля отсчета из точки O в точку O_1 отношение модулей комплексных корней существенно возрастает, с $r_{10}/r_{20} \approx 1$ до $r_{11}/r_{21} \gg 1$.

Ввиду малого относительного различия модулей корней исходного уравнения (r_{10} и r_{20}), последние вычисляются с заметными ошибками. После разложения уравнения с параметром $b_1 = O_1 - O$ модули корней r_{11} и r_{21} отличаются существенно и вычисляются с высокой точностью. Если провести новое разложение исходного

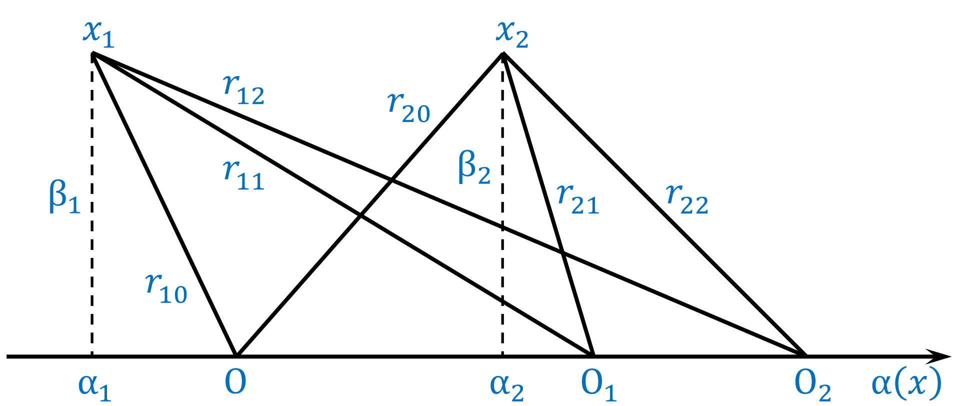


Рис. 3

уравнения с параметром $b_2 = O_2 - O$, то модули r_{12} и r_{22} также вычисляются с небольшими погрешностями. Поэтому использование двух разложений заданного уравнения вместо одного существенно уменьшает ошибки определения комплексных корней x_1 и x_2.

Для рассматриваемого варианта формула **(9.1)** трансформируется в формулы:

$$\alpha_{11} = \frac{r_{11}^2 - r_{12}^2 + b_{12}^2}{2 \cdot b_{12}}, \qquad \alpha_{21} = \frac{r_{21}^2 - r_{22}^2 + b_{12}^2}{2 \cdot b_{12}}, \tag{9.3}$$

где

$$\alpha_{11} = \alpha_1 - O_1, \quad \alpha_{21} = \alpha_2 - O_1, \quad b_{12} = O_2 - O_1.$$

Комплексные корни заданного уравнения в рассматриваемом варианте вычисляются по формулам (см. пример 9.3)

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 \pm j\beta_1, & x_2 &= \alpha_2 \pm j\beta_2, \\ \alpha_1 &= \alpha_{11} + b_1, & \alpha_2 &= \alpha_{21} + b_1, \\ \beta_1 &= \sqrt{r_{11}^2 - \alpha_{11}^2}, & \beta_2 &= \sqrt{r_{21}^2 - \alpha_{21}^2}. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Если с помощью соотношения **(7.1)** может быть определено, что уравнение имеет корни с равными модулями, то предложенным методом все корни вычисляются после одного разложения и одного квадрирования (см. пример 9.1), причем проблема отождествления модулей в этом случае отсутствует.

Несколько корней уравнения (действительных и комплексных) могут иметь равные модули, а остальные корни – различные модули. В этом случае после квадрирования уравнения с помощью соотношения **(7.3)** распознаются корни с равными модулями и определяется их значение. Затем производится разложение уравнения по степеням двучлена, квадрирование и повторное определение модулей (см. примеры 9.2 и 9.4).

Продемонстрируем применение предложенного обобщенного метода Лобачевского на примерах решения уравнений с различными типами корней.

П р и м е р 9.1. Решить уравнение

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Р е ш е н и е. Коэффициенты уравнения удовлетворяют соотношению **(7.1)**. Следовательно, модули всех корней равны между собой, причем их численное значение $r = 1$. После разложения уравнения по степеням разности с параметром $b = -1$ получим уравнение

$$y^6 - 5y^5 + 11y^4 - 13y^3 + 9y^2 - 3y + 1 = 0.$$

Квадрирование этого уравнения позволяет получить следующую информацию о знаках коэффициентов (*см. табл. на след. стр.*).

Квадраты модулей комплексных корней: $r_{02}^2 = 0{,}19806228$; $r_{24}^2 = 1{,}5549581$; $r_{46}^2 = 3{,}2469793$. По формуле **(9.1)** вычисляем действительные части комплексных корней:

m	a_{im}						
	a_{6m}	a_{5m}	a_{4m}	a_{3m}	a_{2m}	a_{1m}	a_{0m}
1	+	+	+	−	+	−	+
2	+	−	+	−	+	+	+
3	+	−	+	+	+	−	+
4	+	+	+	−	+	−	+
5	+	−	+	−	+	−	+
6	+	−	+	−	+	−	+
7	+	−	+	−	+	−	+

$$\alpha_1 = \frac{r_1^2 - r_{02}^2 + b^2}{2b} = \frac{1 - 0{,}19806228 + 1}{2 \cdot (-1)} = -0{,}90096885\,;$$

$$\alpha_2 = \frac{r_2^2 - r_{24}^2 + b^2}{2b} = \frac{1 - 1{,}5549581 + 1}{2 \cdot (-1)} = -0{,}22252095\,;$$

$$\alpha_3 = \frac{r_3^2 - r_{46}^2 + b^2}{2b} = \frac{1 - 3{,}2469793 + 1}{2 \cdot (-1)} = -0{,}62348965\,.$$

Невязка коэффициента a_5 равна $3 \cdot 10^{-7}$, а модули комплексных корней определены безошибочно. Следовательно, уравнение решено с высокой точностью.

П р и м е р 9.2. Решить уравнение

$$x^7 - x^6 - 0{,}23x^5 + 0{,}188x^4 - 0{,}23x^3 + 0{,}188x^2 - 1{,}23x + 1{,}188 = 0\,.$$

Р е ш е н и е. После 9-ти циклов квадрирования получены следующие значения условных модулей:

$$x_1 = 0{,}9\,; \quad x_2 = 0{,}99864693\,; \quad x_3 = 0{,}99920822\,; \quad x_4 = 1{,}0007923\,;$$
$$x_5 = 1{,}0013548\,; \quad x_6 = 1{,}1\,; \quad x_7 = 1{,}2\,.$$

В связи с близостью условных модулей $x_2 \div x_5$ проверяем выполнение соотношения **(7.3)** для коэффициентов квадрированного уравнения:

$$a_{59}z^4 + a_{49}z^3 + a_{39}z^2 + a_{29}z + a_{19} = 0$$

$$r_{24}^2 = 1{,}0000001$$

$$r_{15}^4 = 1$$

Соотношения **(7.3)** выполняются, причем $r_1^2 = 1\,;\ r_2^2 = 1\,.$

В результате разложения заданного уравнения по степеням двучлена с параметром $b = 1$ получим новое уравнение:

$$y^7 + 6y^6 + 14{,}77y^5 + 19{,}038y^4 + 13{,}222y^3 + 4{,}326y^2 - 0{,}942y - 0{,}126 = 0\,.$$

После 6-ти циклов квадрирования определяем условные модули корней:

$$y_1 = 0{,}10000001\,; \quad y_2 = 0{,}2\,; \quad y_3 = 1{,}0000001\,; \quad y_4 = 0{,}9999999\,;$$
$$y_5 = 1{,}732051\,; \quad y_6 = 1{,}7320508\,; \quad y_7 = 2{,}0999998\,.$$

Условные модули y_3 и y_4, y_5 и y_6 близки. С помощью неравенства **(2.18)** убеждаемся в том, что квадратные квадрированные уравнения $a_{46}z^2 + a_{36}z + a_{26} = 0$,

$a_{66}z^2 + a_{56}z + a_{46} = 0$ содержат комплексно-сопряженные корни. Квадраты модулей этих корней: $r_{24}^2 = 1$; $r_{46}^2 = 3{,}0000001$.

По формуле **(9.1)** определяем действительные части комплексных корней:

$$\alpha_1 = \frac{r_1^2 - r_{24}^2 + b^2}{2b} = \frac{1 + 1 - 1}{2 \cdot 1} = 0{,}5\,,$$

$$\alpha_2 = \frac{r_2^2 - r_{46}^2 + b^2}{2b} = \frac{1 - 3 + 1}{2 \cdot 1} = -0{,}5\,.$$

После смещения нуля отсчета модулей на величину $b = 1$ модули x_1 и x_7 уменьшились, а модуль x_6 увеличился. Следовательно, корни x_1 и x_7 имеют знаки «$+$», и корень x_6 – знак «$-$».

Вычисленные значения корней совпадают с истинными величинами.

П р и м е р 9.3. Решить уравнение

$$x^7 - 0{,}6x^6 + 0{,}18x^5 - 0{,}72x^4 - 1{,}1251x^3 + 0{,}64566x^2 -$$
$$- 0{,}786528x + 1{,}21176 = 0\,.$$

Р е ш е н и е. После 9-ти циклов квадрирования вычисляем условные модули:

$$x_1 = 0{,}9\,; \quad x_2 = 1{,}0028189\,; \quad x_3 = 0{,}9971926\,; \quad x_4 = 1{,}0098586\,;$$
$$x_5 = 1{,}0100393\,; \quad x_6 = 1{,}0999991\,; \quad x_7 = 1{,}2000004\,.$$

В связи с близостью модулей $x_2 \div x_5$ проверяем выполнение соотношения **(7.3)** между коэффициентами квадрированного уравнения:

$$a_{59}z^4 + a_{49}z^3 + a_{39}z^2 + a_{29}z + a_{19} = 0$$

$$r_1 = 1{,}0099507$$

$$r_2 = 1{,}007035$$

Соотношение **(7.3)** не выполняется, но модули корней очень близки, причем $r_{13}^2 = 0{,}99190063\,;\ r_{35}^2 = 1{,}0419\,.$

После разложения уравнения с параметром $b_1 = 0{,}5$ вычисляем следующие значения модулей действительных корней и действительных частей комплексных корней:

$$R_{13}^2 = 1{,}1\,; \quad R_{35}^2 = 1{,}62\,; \quad \alpha_1 = 0{,}1500036\,; \quad \alpha_2 = 0{,}3500031\,.$$

Для повышения точности вычисления комплексных корней целесообразно еще раз разложить уравнение по степеням двучлена с параметром $b_2 = 0{,}8$. Аналогично предыдущему определяем квадраты модулей комплексных корней: $R_{\mathrm{I}}^2 = 1{,}4000001$; $R_{\mathrm{II}}^2 = 2{,}2199998$. Следовательно,

$$\alpha_{\mathrm{I}} = \frac{R_{13}^2 - R_{\mathrm{I}}^2 + (b_2 - b_1)^2}{2(b_2 - b_1)} = \frac{1{,}1 - 1{,}4 + (0{,}8 - 0{,}5)^2}{2 \cdot (0{,}8 - 0{,}5)} = -0{,}35\,;$$

$$\alpha_{\mathrm{II}} = \frac{R_{35}^2 - R_{\mathrm{II}}^2 + (b_2 - b_1)^2}{2(b_2 - b_1)} = \frac{1{,}62 - 2{,}2 + (0{,}8 - 0{,}5)^2}{2 \cdot (0{,}8 - 0{,}5)} = -0{,}85\,;$$

$$\beta_{\mathrm{I}} = \sqrt{R_{13}^2 - \alpha_{\mathrm{I}}^2} = \sqrt{1{,}1 - (-0{,}35)^2} = 0{,}9539392\,;$$

$$\beta_{\mathrm{II}} = \sqrt{R_{35}^2 - \alpha_{\mathrm{II}}^2} = \sqrt{1{,}62 - (-0{,}85)^2} = 0{,}72801098\,.$$

Действительные части и модули корней заданного уравнения:

$$\alpha_1 = \alpha_{\mathrm{I}} + b_1 = -0{,}35 + 0{,}5 = 0{,}15\,;$$

$$\alpha_2 = \alpha_{\mathrm{II}} + b_1 = -0{,}85 + 0{,}5 = -0{,}35\,;$$

$$r_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_{\mathrm{I}}^2 = 0{,}15^2 + 0{,}9539392^2 = 1\,;$$

$$r_2^2 = \alpha_2^2 + \beta_{\mathrm{II}}^2 = (-0{,}35)^2 + 0{,}72801098^2 = 1{,}02\,.$$

Истинные значения корней:

$$x_1 = 0{,}9\,; \quad x_2 = 1{,}2\,; \quad x_3 = -1{,}1\,;$$

$$x_{4,5} = 0{,}15 \pm j \cdot 0{,}9539392\,; \quad x_{6,7} = -0{,}35 \pm j \cdot 0{,}72801098\,.$$

Отметим, что если b = 0,01, то α_1 = −0,35032; α_2 = 0,150355; если b = 0,03, то α_1 = −0,35005166; α_2 = 0,15005.

Пример 9.4. Решить уравнение [11]

$$x^6 - 15x^5 + 56x^4 - 56x^3 - 56x^2 + 172x - 120 = 0\,.$$

Решение. Условные модули корней, вычисленные после 6-ти циклов квадрирования:

$$x_1 = 1{,}3839117\,; \quad x_2 = 1{,}405278\,; \quad x_3 = 1{,}4232045\,;$$

$$x_4 = 1{,}4451802\,; \quad x_5 = 2{,}9999996\,; \quad x_6 = 9{,}9999999\,.$$

В связи с близостью условных модулей $x_1 \div x_4$ проверяем выполнение соотношения **(7.3)** для коэффициентов квадрированного уравнения:

$$a_{46}z^4 + a_{36}z^3 + a_{26}z^2 + a_{16}z + a_{06} = 0$$

$$r^2 = 1{,}9999982$$

$$r^4 = 4$$

Соотношение **(7.3)** выполняется. Следовательно, все модули $x_1 \div x_4$ равны $\sqrt{2}$. Модули корней x_5 и x_6 существенно различаются между собой и отличаются от других условных модулей, т.е. соответствующие корни являются действительными.

В результате разложения уравнения с параметром b = 2 получим уравнение

$$y^6 - 3y^5 - 34y^4 - 48y^3 - 8y^2 + 60y + 32 = 0\,.$$

После квадрирования определим значения условных модулей:

$$y_1 = 0{,}58578643\,; \quad y_2 = 1\,; \quad y_3 = 1{,}3989797\,;$$

$$y_4 = 1{,}4296133\,; \quad y_5 = 3{,}4142136\,; \quad y_6 = 7{,}9999993\,.$$

Модули y_3 и y_4 близки. С помощью неравенства **(2.18)** убеждаемся в том, что квадратное квадрированное уравнение $a_{46}z^2 + a_{36}z + a_{26} = 0$ имеет комплексные корни. Квадрат модулей этих корней равен $r_{24}^2 = 2$.

Учитывая сдвиг нуля отсчета на величину $b = 2$, определяем, что действительные корни x_5, x_6 положительны.

Модули y_1 и y_5 существенно различаются между собой и отличаются от других модулей. Поэтому они также являются действительными, причем

$$x_1 = y_1 - b = 0{,}58578643 - 2 = -1{,}4142136\,;$$
$$x_2 = y_5 - b = 3{,}4142136 - 2 = 1{,}4142136\,.$$

Действительные части комплексных корней, вычисленные по формуле **(9.1)**, равны

$$\alpha = \frac{r^2 - r_{24}^2 + b^2}{2b} = \frac{2 - 2 + 4}{2 \cdot 2} = 1\,.$$

Следовательно,

$$\beta = \sqrt{r^2 - \alpha^2} = \sqrt{2 - 1} = 1\text{, т.е. } x_{3,4} = 1 \pm j \cdot 1\,.$$

Таким образом, несмотря на сочетание в данном уравнении действительных и комплексных корней с равными и различными модулями, уравнение решено с весьма высокой точностью.

П р и м е р 9.5. Решить уравнение [2]

$$x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0\,.$$

Это уравнение рассмотрено в примере 5.6, где вычислены следующие значения квадратов модулей комплексных корней: $r_{02}^2 = 1{,}0766766$; $r_{35}^2 = 1{,}666424$.

Р е ш е н и е. После разложения уравнения с параметром $b = 1{,}3$ и определения модулей методом квадрирования получим значения квадратов модулей комплексных корней: $r_{24}^2 = 1{,}9747025$; $r_{46}^2 = 5{,}0368429$. По формуле **(9.1)** вычисляем

$$\alpha_1 = \frac{r_{02}^2 - r_{24}^2 + b^2}{2b} = \frac{1{,}0766766 - 1{,}9747025 + 1{,}3^2}{2 \cdot 1{,}3} = 0{,}30460542\,;$$

$$\alpha_2 = \frac{r_{35}^2 - r_{46}^2 + b^2}{2b} = \frac{1{,}666424 - 5{,}0368429 + 1{,}3^2}{2 \cdot 1{,}3} = -0{,}64631496\,.$$

Действительные корни:

$$x_1 = 1{,}1080163\,; \quad x_2 = 1{,}5378905\,; \quad x_3 = -1{,}9624899\,.$$

Невязка коэффициента a_6 равна $2{,}2 \cdot 10^{-6}$, а невязка свободного члена a_0 равна $3{,}4 \cdot 10^{-6}$.

П р и м е р 9.6. Решить уравнение Леверье

$$x^6 + 4{,}224x^5 + 6{,}5071x^4 + 7{,}5013x^3 + 8{,}4691x^2 + 3{,}3641x + 1{,}6252 = 0\,,$$

которое в примерах 5.5, 6.1, 8.8 решено иными способами, причем были вычислены следующие значения квадратов модулей комплексных корней:

$$r_1^2 = 0{,}3053145\,; \quad r_2^2 = 1{,}2965098\,; \quad r_3^2 = 4{,}1056652\,.$$

Р е ш е н и е. После разложения заданного уравнения с параметром $b = -1{,}3$ получим уравнение

$$x^6 + 2{,}424x^5 + 1{,}5211x^4 + 2{,}95438x^3 + 4{,}212784x^2 -$$
$$- 0{,}2382838x + 1{,}2188261 = 0\,.$$

В результате квадрирования этого уравнения вычислим значения квадратов модулей корней:

$$r_{02}^2 = 0{,}28410191\,; \quad r_{24}^2 = 1{,}4335538\,; \quad r_{46}^2 = 2{,}9926335\,.$$

По формуле **(9.1)** находим

$$\alpha_{02} = -0{,}18535431\,; \quad \alpha_{24} = 0{,}07840666\,; \quad \alpha_{46} = -2{,}0050528\,.$$

Невязка коэффициента a_5 равна $2 \cdot 10^{-7}$.

Таким образом, несмотря на большое разнообразие уравнений, решенных в примерах 9.1–9.6 методом двукратного квадрирования, алгоритм вычислений остается весьма простым и меняется незначительно.

Как показано ниже, недостатком метода двукратного квадрирования при $n < 6$ является большее время счета по сравнению с аналогичным показателем остальных вариантов метода Лобачевского, рассмотренных в данной работе. При решении уравнений высоких степеней метод двукратного квадрирования требует существенно меньшего времени по сравнению с любыми другими способами определения комплексных корней.

§ 10. Сопоставление различных вариантов метода Лобачевского с другими методами решения уравнений

10.1. Рекомендации по использованию различных вариантов метода Лобачевского. Выше были рассмотрены различные способы усовершенствования метода Лобачевского. Рекомендуется следующий порядок их использования.

1. При решении уравнений степени $n \le 5$ целесообразно применять квадрирование, формулы Энке, схему Горнера, упрощенный алгоритм определения знаков корней.

2. Если значения показателя степени уравнения находятся в диапазоне $5 \le \mathrm{n} \le 7$, то дополнительно можно рекомендовать методы деквадрирования и сопряженных уравнений. Кроме того, вместо перечисленных способов можно использовать метод двукратного квадрирования (обобщенный метод Лобачевского).

3. При $n > 7$ целесообразно использовать в основном обобщенный метод Лобачевского.

4. Для решения алгебраических уравнений с корнями, имеющими равные модули и бо́льшие показатели степени, исключающие возможность квадрирования на данном типе микрокалькулятора (или микро-ЭВМ), целесообразно использовать метод сопряженных уравнений.

Рассмотрим алгоритм решения уравнений с использованием всех рассмотренных способов, кроме метода двукратного квадрирования, который изложен особо.

До начала решения целесообразно проанализировать коэффициенты заданного уравнения (рис. 4):

– если имеет место неравенство $|a_0| \gg |a_i|$ $(i = 1, \dots, n)$, то уравнение необходимо разложить по степеням $x \pm a_0^{1/n}$;

– при выполнении соотношений **(7.1)** составляется и решается сопряженное уравнение или производится преобразование заданного уравнения с целью использования формул Энке.

После квадрирования и вычисления условных модулей необходимо провести анализ этих модулей.

Если условные модули существенно различаются между собой, то определяются знаки модулей и решение уравнения завершается. При наличии одной или нескольких пар близких модулей проверяется выполнение неравенства **(2.18)** для каждого квадратного квадрированного уравнения. Если неравенство **(2.18)** выполняется, то комплексные корни вычисляются деквадрированием или с помощью формул Энке.

Если неравенство **(2.18)** не выполняется, то определяются корни квадратных квадрированных уравнений, а затем, путем извлечения корня N-й степени, – уточненные значения модулей заданного уравнения. Решение завершается определением знаков модулей. При наличии нескольких близких модулей проверяется наличие соотношений **(7.3)** между коэффициентами. Если это соотношение выполняется, то формируется сопряженное уравнение или осуществляется преобразование с целью применения формул Энке.

После решения сопряженного уравнения и определения мнимых частей комплексных корней (при их равенстве нулю корни являются действительными) решение уравнения завершается.

При невыполнении соотношений **(7.1)** заданное уравнение разлагается по степеням двучлена, квадрируется, а затем вычисляются модули корней и их знаки.

В случае уравнений высокой степени могут встретиться все рассмотренные варианты. Например, может быть часть модулей, хорошо отделенных один от другого, другая часть модулей (условных) – попарно близких, а оставшиеся несколько модулей – с близкими значениями. В этом случае останов счета по окончании вычислений по данному варианту не производится; вычисления осуществляются по другим вариантам – до завершения определения всех корней.

Изложенный алгоритм обеспечивает высокоточное определение корней уравнения. Если высокая точность не нужна, то алгоритм вычислений можно существенно упростить. Но и при реализации алгоритма в полном объеме, как показано ниже, время счета по методу Лобачевского меньше, а точность определения корней выше по сравнению с соответствующими показателями применяемых в настоящее время методов решения алгебраических уравнений.

Алгоритм решения алгебраических уравнений обобщенным методом Лобачевского приведен на рис. 4. Решение уравнений целесообразно начинать с проверки наличия в уравнении корней (действительных и комплексных) с равными модулями, т.е. с проверки выполнения соотношений **(7.1)** между коэффициентами заданного уравнения. При выполнении соотношений **(7.1)** вычисляется точное значение модулей корней. Если соотношения **(7.1)** не выполняются, проводится квадрирование и определение условных модулей.

В блоке сравнения условных модулей проводится разложение уравнения по степеням двучлена, причем параметр разложения b можно принять равным $a_0^{1/n}$, а знак b в схеме Горнера – совпадающим со знаком коэффициента a_{n-1}. Количество вычисленных корней k сравнивается со степенью уравнения n. При $k < n$ проводится анализ относительной величины условного модуля и соседних модулей. При $r_i/r_{i-1} > 1{,}05$ (для ПМК типа «Электроника Б3-34») можно полагать, что данный модуль соответствует действительному корню. Вычисление последнего завершается определением знака (путем сопоставления с условным модулем, вычисленным до разложения уравнения). Если $r_i/r_{i-1} \leq 1{,}05$, а модуль r_{i-2} отличается на 5% и более, то с помощью неравенства **(2.18)** определяется тип корней. При небольшом различии нескольких условных модулей проверяется соотношение **(7.3)** между коэффициентами квадрированного уравнения. При невыполне-

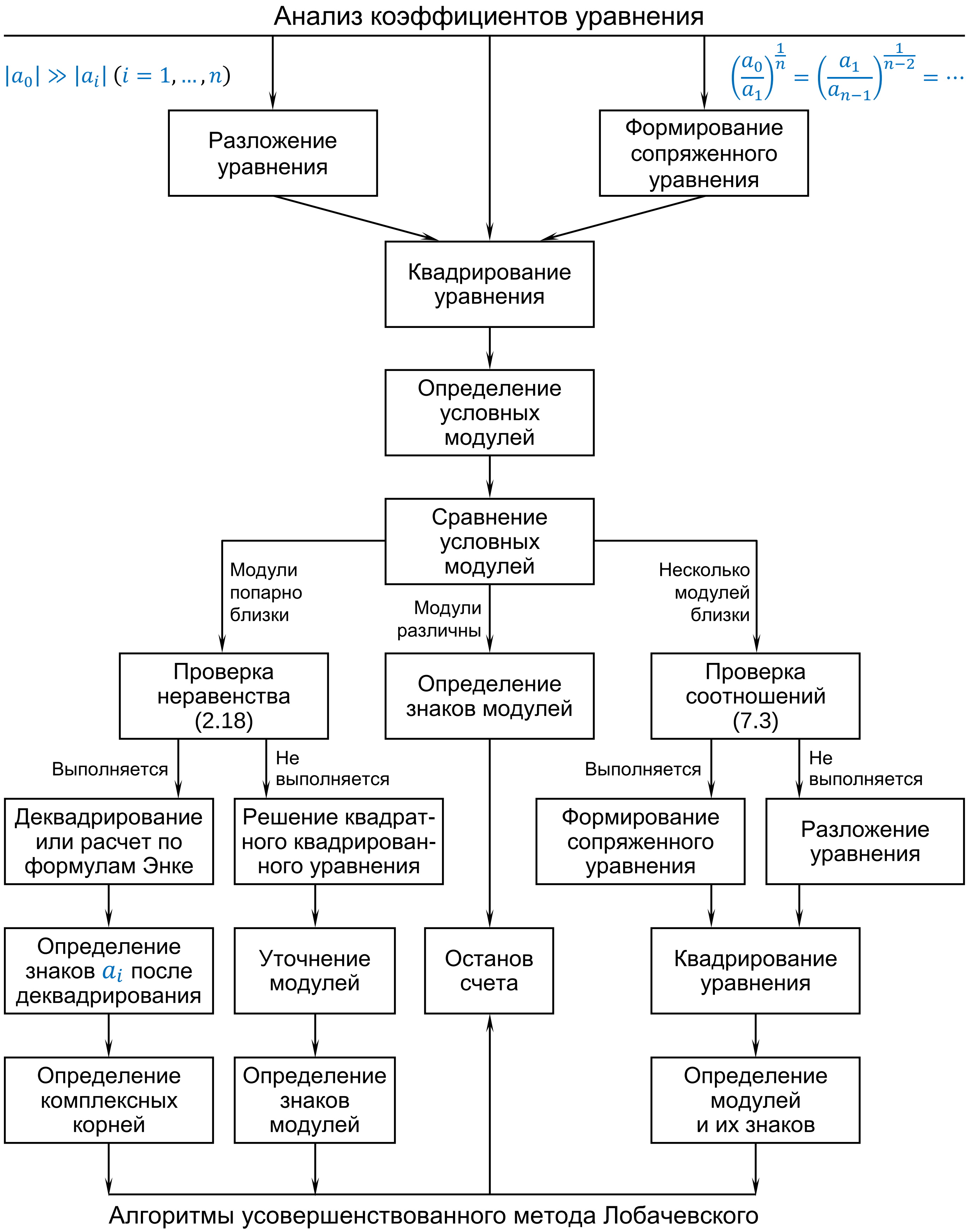


Рис. 4

нии соотношения **(7.3)** проводится разложение заданного уравнения по степеням двучлена, а если это соотношение выполняется – определяются модули корней и вычисляются комплексные и действительные корни. Счет прекращается, если количество вычисленных корней равно степени n решаемого уравнения.

10.2. Сравнение метода Лобачевского с методами Ньютона и Лина. Сравним изложенные выше варианты метода Лобачевского с наиболее распространенными в настоящее время методами:

– вычисления действительных корней – методом Ньютона;

– вычисления комплексных корней – методом Лина;

– решения уравнений степени $n \leq 5$ – специальным методом выделения квадратичного множителя [22];

– решения уравнении с показателем степени $n > 5$ – методом нелинейного программирования.

Для методов сопоставим следующие показатели:

– точность вычисления модулей корней;

– количество арифметических операций;

– универсальность алгоритмов.

Количество арифметических действий в каждом цикле квадрирования можно определить по формулам:

а) количество умножений (делений):

$$J_1 = 2\left(1 + \sum_{2}^{(n+1)/2} i\right) - M\,; \tag{10.1}$$

б) количество сложений (вычитаний):

$$S_1 = 2\sum_{2}^{(n+1)/2} i - M\,, \tag{10.2}$$

где

$$M = \begin{cases} (n+1)/2 & \text{при } n \text{ четном,} \\ 0 & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

При использовании метода Ньютона значения функции и ее производной целесообразно вычислять по схеме Горнера. В этом случае в каждом шаге (цикле) вычислений модуля выполняется $J_2 = 2n - 2$ сложений (вычитаний) и $S_2 = 2n$ умножений (делений).

Рассчитанные по этим формулам количества арифметических действий для вычисления всех корней алгебраического уравнения приведены в табл. 8. Кроме того, в табл. 9 представлены результаты вычисления модулей корней уравнения 6-й степени, которое в примере 3.1 решено методом Лобачевского на микрокалькуляторе «Электроника Б3-34».

Из приведенных в табл. 9 данных следует: практически предельная точность вычисления модулей корней имеет место после выполнения 5-6 шагов (циклов) расчета, если начальные значении корней выбраны достаточно близкими к их истинным величинам. В противном случае количество циклов расчета может существенно возрасти (см. табл. 9 – вычисление корня 6 при начальных значениях 7 и 10).

Из сопоставления результатов расчетов, приведенных в табл. 6 и 9, видно также, что наибольшая точность метода Ньютона не превосходит наибольшей точности метода Лобачевского, если в обоих случаях используется микрокалькулятор типа «Электроника Б3-34».

Таблица 8

Количество арифметических действий, необходимое для решения алгебраического уравнения n-й степени методами Лобачевского и Ньютона

Степень уравнения	$n = 3$		$n = 4$		$n = 5$		$n = 6$		$n = 10$	
Методы решения	Лобачевского	Ньютона	Лобачевского	Ньютона	Лобачевского	Ньютона	Лобачевского	Ньютона	Лобачевского	Ньютона
Количество арифметических действий:										
а) за один шаг (цикл) вычислений:										
– умножений	6	4	9	6	12	8	16	10	36	18
– сложений	4	6	7	8	10	10	14	12	34	20
б) за 5-6 шагов (циклов) вычислений										
– умножений	30-36	20-24	45-54	30-36	60-72	40-48	80-96	50-60	180-216	90-108
– сложений	20-24	30-36	35-42	40-48	50-60	50-60	70-84	60-72	170-204	100-120
в) для определения всех корней уравнения										
– умножений	33-39	60-72	49-58	120-144	65-77	200-288	86-92	300-360	190-226	900-1080
– сложений	20-24	90-108	35-42	160-192	50-60	250-300	70-84	360-432	170-204	1000-1200
– извлечений корня n-ной степени	3	–	4	–	5	–	6	–	10	–
– всего арифметических действий	56-66	150-180	88-104	280-336	120-142	450-588	162-182	660-792	370-440	1900-2280

Таблица 9

Результаты расчета корней алгебраического уравнения 6-й степени (пример 3.1) методом Ньютона

№ шага (цикла) расчета корней	Истинные значения корней						
	1	2	3	4	5	6	7
	Принятые начальные значения						
	0,5	1,5	3,3	4,4	5,5	7	10
1	0,76621082	2,1350761	2,8349067	3,7878025	4,8649298	6,5918367	8,995616
2	0,92564851	1,9679713	3,0029617	4,0506347	5,0324264	6,2958652	8,1753221
3	0,98962695	1,9990018	3,0000273	4,0005825	5,0010101	6,1076175	7,5124809
4	0,99976203	2,0000017	3,0000315	3,9999186	4,9999948	6,0200848	6,9862875
5	1,0000003	1,9999938	3,0000273	3,9999636	5,0000886	6,00086	6,581535
6	0,9999996	2,0000005		3,999817	5,0001199	6,000023	счет прекращен (см. столбец рядом)
7	0,9999996	1,9999909			4,9999841	6,0000309	
8	0,99999965	2,0000042				6,0000267	
9	1,0000001	2,0000088				5,9999884	
10						6,0000467	

Таблица 10

Значения коэффициентов 2α и r^2 трехчлена, выделенного из уравнения Леверье методом Лина

№ шага	Коэффициент 2α	Коэффициент r^2
0	4	6
1	2,1404102	0,81060995
2	1,8308649	0,82274822
3	0,47382056	0,99375138
4	0,36056875	0,42696489
5	0,34952847	0,32718088
6	0,34326751	0,30263147
7	0,36234699	0,30113645
8	0,36965148	0,30343437
9	0,37116422	0,30483131
10	0,37107527	0,30528697
11	0,37084656	0,30535815
12	0,3707371	0,30534076
13	0,37070707	0,30534076
14	0,37070544	0,30532307
15	0,37070666	0,30531419
16	0,37070815	0,30531418
17	0,37070867	0,30531538
18	0,37070877	0,30531449
19	0,37070875	0,30531452
20	0,37070873	0,30531452
21	0,37070873	0,30531452

Анализ приведенных выше и других аналогичных данных показывает, что количество арифметических действий по определению всех корней уравнения методом Ньютона больше, чем при использовании метода Лобачевского, от 1,5–2 раз при степени уравнения $n = 3$ до 4–5 раз при $n = 10$.

Выше не учитывались арифметические действия, необходимые:

– для определения знаков модулей корней в методе Лобачевского;

– для определения начальных значений корней (отделения корней) в методе Ньютона.

При учете всего объема вычислений преимущество метода Лобачевского в случае вычисления действительных корней уравнений по сравнению с методом Ньютона возрастает еще больше.

Сопоставим метод Лобачевского с методом Лина, который широко применяется для решения уравнений с комплексными корнями.

Заимствованное из работы [10] уравнение Леверье 6-й степени в § 6 было решено методом Лобачевского с использованием деквадрирования. Из формул **(10.1)** и **(10.2)** видно, что при 7-ми циклах квадрирования необходимо произвести 140 умножений и 126 сложений. Вследствие этого на одну пару комплексно-сопряженных корней приходится 47 умножений и 42 сложения. Кроме того, в каждом цикле деквадрирования необходимо выполнить 2 операции сложения, 1 операцию умножении и 1 операцию извлечения корня. Общее количество операций – 118.

Решим уравнение Леверье методом Лина.

Начальные значения коэффициентов трехчлена, выделяемого из заданного уравнения, выбраны в соответствии с рекомендациями работы [10], равными $2\alpha_0 = 4$; $r_0^2 = 6$. Вычисленные значения коэффициентов трехчлена $\alpha^2 + 2\alpha + r^2$ в различных циклах расчета приведены в табл. 10.

Из табл. 10 видно, что для достижения почти предельной точности вычислений достаточно выполнить 15–17 шагов расчета. При этом потребуется выполнить: умножений – 120–152; сложений – 120–152. Таким образом, для решения уравнений 6-й степени методом Лобачевского требуется, при той же точности, в 2 раза меньше арифметических действий по сравнению с методом Лина.

Определить другие корни уравнения Леверье методом Лина не представляется возможным, так как условия видимости метода для этих корней не выполняются даже при весьма близких к истинным начальных значениях коэффициентов трехчленов.

В настоящей работе показано, что при решении уравнений с комплексными корнями, имеющими равные модули, целесообразно применять сопряженные уравнения, имеющие действительные корни. Поэтому решение таких уравнений сводится к рассмотренному выше случаю решения уравнений с действительными корнями.

Из изложенного выше можно сделать следующие выводы.

1. При использовании микрокалькуляторов типа «Электроника Б3-34» точность методов Лобачевского, Ньютона и Лина приблизительно одинакова.

2. Метод Лобачевского требует от 1,5 до 5 раз меньшего объема вычислений всех корней уравнений степени $3 \le n \le 10$.

3. Существенным преимуществом метода Лобачевского по сравнению с методами Ньютона, Лина и другими является отсутствие необходимости:

а) отделения корней;

б) проверки сходимости метода;

в) использования других методов, если данный метод не сходится.

10.3. Сравнение метода Лобачевского с другими методами решения алгебраических уравнений. При решении алгебраических уравнений на ЭВМ широко используются методы парабол (Мюллера) и скорейшего спуска [18, 19, 20].

Соответствующие программы характеризуются следующими показателями:

– программа размещается на 250–300 ячейках памяти 3-адресной ЭВМ; при использовании одноадресной ЭВМ потребное количество ячеек памяти возрастает до 600–800;

– для определения корней многочлена 20-й степени с действительными коэффициентами требуется 33–37 с, если быстродействие ЭВМ составляет в среднем 20 000 операций в секунду. При этом относительная погрешность равна 10^{-9};

– двукратные корни вычисляются с меньшей точностью; программы обеспечивают 5–6 верных знаков, а при счете трехкратных корней – 3–4 верных знака.

Из этих данных следует, что использование методов Мюллера и скорейшего спуска в программах, предназначенных для современных микрокалькуляторов, нецелесообразно как вследствие весьма большого объема программной памяти, так и вследствие низкой точности вычисления кратных корней.

В работах [21, 22] описаны предназначенные для микрокалькуляторов типа «Электроника Б3-34» программы решения алгебраических уравнений 3÷5-й степеней, в которых при n нечетном определяется и исключается действительный корень, а при n четном уравнение разлагается на трехчлены типа **(5.4)**. В работе [22] отмечается, что предложенный авторами новый алгоритм гарантирует сходимость вычисления корней.

Проведем сравнительный анализ метода Лобачевского и упомянутого метода по следующим показателям:

– точность вычисления корней;

– время счета;

– универсальность алгоритма;

– сходимость вычислений;

– степень автоматизации счета.

Таблица 11

Время счета по прилагаемым программам на микрокалькуляторе «Электроника Б3-34»

Наименование и номер программы вычислений	Количество циклов (шагов) счета	Время счета, секунды				
		Степень уравнений n				
		3	4	5	6	7
Квадрирование уравнений; программы № 1–5	1 5	12 60	18 90	24 120	34 170	43 215
Деквадрирование уравнений; программа № 9	1 (для пары комплексных корней) $n/2$ шагов	10 10	10 20	10 20	10 30	10 30
Извлечение корня N-й степени; программа № 7	1 корень n корней	10 30	10 40	10 50	10 60	10 70
Определение знака корня автоматически; программа № 10	1 $n-1$	22 44	22 66	22 88	22 110	22 132
Определение знака корня полуавтоматически; программа № 10	1 корень n корней	50 100	50 150	50 200	50 250	50 300
Деления уравнения на двучлен; программа № 8	1	30	37	43	50	60
Разложение уравнения по степеням двучлена; программа № 8	1	63	100	145	195	255
Решение квадратного уравнения «вручную»	1	40	40	40	40	40
Деление коэффициентов уравнения на заданное число «вручную»	$n+1$ коэффициентов	24	30	36	42	48
Деление коэффициентов уравнения на заданное число по программе № 6	$n+1$ коэффициентов	12	15	18	21	24
Двукратное квадрирование, разложение уравнения по степеням двучлена, извлечение корней	6	267	396	533	723	997

При сравнении методов целесообразно решать не только сравнительно простые для метода Лобачевского уравнения, но и сложные – с корнями, имеющими равные и близкие модули, с бóльшими значениями модулей и т.п.

Время счета по прилагаемым программам на микрокалькуляторе типа «Электроника Б3-34» приведено в табл. 11, причем эти данные получены с помощью одного и того же микрокалькулятора, так как время счета на разных экземплярах может существенно различаться. В табл. 11 приведено только время счета калькулятора, потому что оно может быть объективно оценено. При определении общего времени, необходимого дли решения уравнений, должно быть учтено:

– время ввода программы, которое составляет 4–4,5 мин. (при использовании всех ячеек программной памяти калькулятора);

– время ввода исходных данных, которое колеблется в значительных пределах, его осредненное значение можно принять равным 1 мин;

– время перехода от одной программы счета к другой – составляет 10–20 с.

При сравнении методов необходимо учесть, что на 98 ячейках памяти микрокалькулятора, занимаемых программой решения уравнений 5-й степени [22], можно записать следующие прилагаемые программы:

– квадрирования уравнений 5-й степени и извлечения корпя N-й степени;

– разложения уравнения по степеням двучлена, а также деления уравнения на двучлен (исключения корня).

Таким образом, для определения общего времени решения уравнения необходимо к времени счета, указанному в табл. 11, прибавить 5–5,5 мин. при использовании метода [22] и 6–6,5 мин. при использовании модернизированного метода Лобачевского.

Точностные и временны́е показатели сравниваемых методов приведены в табл. 12. Из анализа этих данных можно сделать следующие выводы.

1. Точность определения корней модернизированным методом Лобачевского в ряде случаев существенно превышает точность метода [22], а в остальных случаях – не ниже точности этого метода.

2. Метод Лобачевского сходится при решении уравнений с любыми типами корней. Метод [22], как следует из представленных в табл. 12 данных, сходится не во всех случаях. Причем информация оператору о выдаче ложных значений корней не выдается. Это обусловливает необходимость проверки правильности решений даже в том случае, когда уравнение решено безошибочно.

3. Бесспорным достоинством метода [22] является практически полная автоматизация процесса решения корней. При использовании модернизированного метода Лобачевского применяются различные программы, выбор которых производится оператором. Несмотря на использование нескольких программ, общее время решения уравнения 3÷5-й степеней методом Лобачевского в 1,5 раза меньше.

При решении уравнений 6-й и более высоких степеней весьма часто используется метод последовательного определения и исключения корней. В этом случае точность вычисления корней уменьшается вследствие накопления ошибок вычислений. Так, согласно данным работы [22], в уравнении 8-й степени последний из вычисленных корней может не содержать ни одной верной цифры. Для повышения точности вычислений рекомендуется повторять расчеты, меняя каждый раз порядок определения корней. Вследствие этого время решения уравнения существенно возрастает.

При решении уравнений степени $n \geq 6$ в работе [22] рекомендуется использовать метод нелинейного программирования, с помощью которого можно с высокой точностью определить коэффициенты трехчлена **(5.4)**. После исключения его корней полученное уравнение 4÷5-й степеней (при $n = 6 \div 7$) решается с помощью упомянутой ранее программы. Как показано в работе [22], для определения этим методом трехчлена типа **(5.4)** уравнения 6-й степени (см. табл. 12) потребовалось 19 мин. счета на микрокалькуляторе. Невязка модуля равна 10^{-6}. Еще 11 мин. счета необходимо для исключения из заданного уравнения вычисленного трехчлена и решения полученного уравнения 4-й степени. При решении заданного уравнения 6-й степени методом Лобачевского с деквадрированием требуется 9 мин. счета (на разложение уравнения по степеням двучлена, квадрирование и деквадрирование), а невязка мо-

Таблица 12

Точностные и временны́е показатели методов решения алгебраических уравнений при использовании микрокалькулятора «Электроника Б3-34»

Номер примера; заданное уравнение	Истинные значения модулей корней	Применяемые методы решения			Метод Лобачевского			
		Вычисленные значения модулей	Относит. погрешности	Время счета ′ – мин ″ – с	Вычисленные значения модулей	Относит. погрешности	№ программы	Время счета ′ – мин ″ – с
Пример 4.4 $x^3 - 65x^2 + 1087x - 1023 = 0$	1 31 33	0,999999 31 33	10^{-7} 0 0	5′30″	1 31 33	0 0 0	1,10,12	3′
Пример 4.5 $x^3 - 1519x^2 + 769118x -$ $- 1{,}2980924 \cdot 10^8 = 0$	505 506 508	504,83435 506,3082 507,8574	$3 \cdot 10^{-4}$ $6 \cdot 10^{-4}$ $2 \cdot 10^{-4}$	7′30″	504,9999992 506,0000002 507,9999993	$1{,}6 \cdot 10^{-9}$ $4 \cdot 10^{-10}$ $1{,}4 \cdot 10^{-9}$	8,1,10	4′
Пример 4.6 $x^3 - 3221x^2 + 3453210x -$ $- 1{,}23321 \cdot 10^9 = 0$	1000 1110 1111	999,99545 1110,5022± $\pm j \cdot 0{,}70710678$	$4 \cdot 10^{-6}$ Неверно	5′	1000,00002 1110 1111	$2 \cdot 10^{-8}$ 0 0	8,1,10	4′
Пример 4.7 $x^4 + x^3 - 1085x^2 - 717x + 289800 = 0$	21 25 −23 −24	21,00001 24,99999 −22,99995 −24,00005	$5 \cdot 10^{-7}$ $4 \cdot 10^{-7}$ $2 \cdot 10^{-6}$ $2 \cdot 10^{-6}$	12′30″	21 25 −23 −24	0 0 0 0	8,2,10,8	8′
$x^4 - 19998x^3 + 146{,}8892x^2 -$ $- 468{,}99507x + 548{,}47739 = 0$	3,333 4,444 5,555 6,666	3,333069 4,443967 5,5550455 6,6659804	$2 \cdot 10^{-5}$ $7 \cdot 10^{-6}$ $8 \cdot 10^{-6}$ $3 \cdot 10^{-6}$	12′30″	3,3329993 4,443996 5,5550102 6,6659934	$2 \cdot 10^{-7}$ $9 \cdot 10^{-7}$ $2 \cdot 10^{-6}$ 10^{-6}	2,10	3′30″
$x^4 - 4{,}34x^3 + 7{,}033576x^2 -$ $- 5{,}0430053x + 1{,}3490411 = 0$	0,888 1,11 1,12 1,222	0,8880592 1,096064 1,1204138 1,2219736	$7 \cdot 10^{-5}$ $1{,}3 \cdot 10^{-2}$ $4 \cdot 10^{-4}$ $2 \cdot 10^{-5}$	9′	0,88799978 1,1100553 1,1199374 1,2220076	$2{,}5 \cdot 10^{-7}$ $5 \cdot 10^{-5}$ $6 \cdot 10^{-5}$ $6 \cdot 10^{-6}$	2,10	4′

Продолжение табл. 12

$x^4+x^3+x^2-x-1=0$	$-0{,}66099253$ $0{,}84873489$ $-0{,}59369115\pm$ $\pm j\cdot 1{,}1961583$	$0{,}66099252$ $0{,}84873486$ $-0{,}59369115\pm$ $\pm j\cdot 1{,}1961583$	10^{-7} 10^{-7}	$9'$	$-0{,}66099253$ $0{,}84873487$ $-0{,}59369115\pm$ $\pm j\cdot 1{,}1961583$	0 10^{-7}	2,9,10	$6'$
$x^5+8x^4+31x^3+80x^2+94x+20=0$ (см. [21])	$-1\pm j\cdot 3$ $-3{,}7320507$ -2 $-0{,}2679421$	$-1\pm j\cdot 3{,}0000178$ $-3{,}7320507$ $-2{,}000032$ $-0{,}2679458$	$0+10^{-5}$ 10^{-8} $1{,}5\cdot 10^{-5}$ $1{,}2\cdot 10^{-5}$	$17'$	$-1\pm j\cdot 3$ $-3{,}7320502$ $-2{,}000000$ $-0{,}2679421$	$0+0$ $1\cdot 10^{-7}$ 0 0	3,9,10	$7'$
$x^5-14{,}451x^4+50{,}915376x^3-$ $-76{,}160098x^2+52{,}338867x-$ $-13{,}640154=0$	$0{,}888$ $1{,}11$ $1{,}12$ $1{,}222$ $10{,}111$	$0{,}8612452$ $1{,}0985651\pm$ $\pm j\cdot 0{,}12176124$ $1{,}2816256$ $10{,}110999$	$3\cdot 10^{-2}$ Неверно $5\cdot 10^{-2}$ 10^{-7}	$17'$	$0{,}8879945$ $1{,}1099703$ $1{,}1199829$ $1{,}2220424$ $10{,}110999$	$6\cdot 10^{-6}$ $3\cdot 10^{-5}$ $1{,}5\cdot 10^{-5}$ $1{,}5\cdot 10^{-5}$ 10^{-7}	8,3,10	$8'$
Пример 6.3 $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$			10^{-6} – для 1-го модуля [22]	$19'+$ $+11'$	$-0{,}9009689\pm$ $\pm j\cdot 0{,}43388374$ $-0{,}222521\pm$ $\pm j\cdot 0{,}97492789$ $0{,}6234898\pm$ $\pm j\cdot 0{,}78183163$	10^{-7} – для всех модулей	8,4,9	$9'$

дулей равна 10^{-7}. С помощью сопряженного уравнения корни этого уравнения можно определить за 4 мин. при невязке модулей 10^{-7}.

Из приведенных выше данных следует также, что метод двукратного квадрирования при $n < 6$ требует заметно большего времени счета по сравнению с другими вариантами реализации метода Лобачевского. Но время счета по этому методу меньше, чем у широко используемых методов. Как уже отмечалось, алгоритм решения уравнений с помощью метода двукратного квадрирования существенно проще алгоритма других вариантов метода Лобачевского, что имеет весьма важное значение. Высока и точность решения. Поэтому обобщенный метод Лобачевского рекомендуется в качестве основного способа решения уравнений с любыми типами корней.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПРОГРАММЫ ДЛЯ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРА «ЭЛЕКТРОНИКА Б3-34»

Программа 1. Вычисление модулей корней уравнений 3-й степени

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + 1 = 0$$

№ ячеек	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	ИП1	Fx^2	ИПС	ИП2	×	2	×	–	ПА	ИП2
10	Fx^2	ИП1	ИП3	×	2	×	–	ПВ	ИПС	Fx^2
20	ПС	ИП3	Fx^2	П3	ИПА	П1	ИПВ	П2	FL0	00
30	С/П	÷	Fx<0	35	/–/	ИПД	XY	Fx^y	С/П	БП
40	31									

Ввод исходных данных: $a_3 \div a_1 \to 3 \div 1$; $a_0 \to$ С.

Инструкция:

а) определение m: возведением m раз в квадрат $|a_{max}|$ до тех пор, пока порядок возводимого числа не превысит 50;

б) засылка: $m \to 0$;

в) пуск: В/О; С/П;

г) засылка: $1/2^m \to$ Д;

д) вычисление модуля x_i: нажать клавиши $i - 1$; i; С/П.

Программа 2. Вычисление модулей корней уравнений 4-й степени

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + 1 = 0$$

№ ячеек	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	ИП1	Fx^2	ИПС	ИП2	×	2	×	−	ПА	ИП2
10	Fx^2	ИПС	ИП4	×	ИП1	ИП3	×	−	2	×
20	+	ПВ	ИП3	Fx^2	ИП2	ИП4	×	2	×	−
30	П9	ИПС	Fx^2	ПС	ИП4	Fx^2	П4	ИПА	П1	ИПВ
40	П2	ИП9	П3	FL0	00	С/П	÷	Fx<0	50	/−/
50	ИПД	XY	Fx^y	С/П	БП	46				

Ввод исходных данных: $a_4 \div a_1 \to 4 \div 1$; $a_0 \to$ С.

Инструкция:

а) определение m: возведением m раз в квадрат $|a_{\max}|$ до тех пор, пока порядок возводимого числа не превысит 50;

б) засылка: $m \to 0$;

в) пуск: В/О; С/П;

г) засылка: $1/2^m \to$ Д;

д) вычисление модуля x_i: нажать клавиши $i-1$; i; С/П.

П р о г р а м м а 3. Вычисление модулей корней уравнений 5-й степени

$$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + 1 = 0$$

№ ячеек	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	ИПС	ИП2	×	2	×	/–/	П7	ИПС	ИП4	×
10	ИП1	ИП3	×	–	2	×	П8	ИП1	ИП5	×
20	ИП2	ИП4	×	–	2	×	П9	ИП3	ИП5	×
30	2	×	/–/	ПА	6	П6	Сх	ПВ	ИП6	5
40	–	ПД	КИПД	Fx^2	КИП6	+	КПД	5	ИПД	–
50	Fx=0	38	ИПС	Fx^2	ПС	FL0	00	С/П	÷	Fx<0
60	62	/–/	ИПД	XY	Fx^y	С/П	БП	58		

Ввод исходных данных: $a_5 \div a_1 \to 5 \div 1$; $a_0 \to$ С.

И н с т р у к ц и я:

а) определение m: возведением m раз в квадрат $|a_{max}|$ до тех пор, пока порядок возводимого числа не превысит 50;

б) засылка: $m \to 0$;

в) пуск: В/О; С/П;

г) засылка: $1/2^m \to$ Д;

д) вычисление модуля x_i: нажать клавиши $i - 1$; i; С/П.

П р о г р а м м а 4. Вычисление модулей корней уравнений 6-й степени

$$a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + 1 = 0$$

№ ячеек	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	ИП1	Fx^2	ИПС	ИП2	×	2	×	–	ПА	ИП2
10	Fx^2	ИПС	ИП4	×	ИП1	ИП3	×	–	2	×
20	+	ПВ	ИП3	Fx^2	ИП1	ИП5	×	ИПС	ИП6	×
30	–	ИП2	ИП4	×	–	2	×	+	П9	ИП4
40	Fx^2	ИП2	ИП6	×	ИП3	ИП5	×	–	2	×
50	+	П8	ИП5	Fx^2	ИП4	ИП6	×	2	×	–
60	П7	ИП6	Fx^2	П6	ИПС	Fx^2	ПС	ИПА	П1	ИПВ
70	П2	ИП9	П3	ИП8	П4	ИП7	П5	FL0	00	С/П
80	÷	Fx<0	84	/–/	ИПД	XY	Fx^y	С/П	БП	80

Ввод исходных данных: $a_6 \div a_1 \to 6 \div 1$; $a_0 \to С$.

И н с т р у к ц и я:

а) определение m: возведением m раз в квадрат $|a_{\max}|$ до тех пор, пока порядок возводимого числа не превысит 50;

б) засылка: $m \to 0$;

в) пуск: В/О; С/П;

г) засылка: $1/2^m \to Д$;

д) вычисление модуля x_i: нажать клавиши $i - 1$; i; С/П.

П р о г р а м м а 5. Квадрирование уравнений 7-й степени

$$a_7x^7+a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+1=0$$

№ ячеек	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	ИП1	Fx^2	ИПС	ИП2	×	2	×	–	ПА	ИП2
10	Fx^2	ИПС	ИП4	×	ИП1	ИП3	×	–	2	×
20	+	ПВ	ИП3	Fx^2	ИП1	ИП5	×	ИП2	ИП4	×
30	–	ИПС	ИП6	×	–	2	×	+	П0	ИП4
40	Fx^2	ИП2	ИП6	×	ИП1	ИП7	×	–	ИП3	ИП5
50	×	–	2	×	+	ПД	ИП5	Fx^2	ИП3	ИП7
60	×	ИП4	ИП6	×	–	2	×	+	П9	ИП6
70	Fx^2	ИП5	ИП7	×	2	×	–	П8	ИПС	Fx^2
80	ПС	ИП7	Fx^2	П7	ИПА	П1	ИПВ	П2	ИП0	П3
90	ИПД	П4	ИП9	П5	ИП8	П6	ИПz	С/П		

Ввод исходных данных: $a_7 \div a_1 \rightarrow 7 \div 1$; $a_0 \rightarrow$ С, z – ячейка с $|a_{\max}|$.
И н с т р у к ц и я:
а) пуск: В/О; С/П;
б) запись знаков коэффициентов в данном цикле квадрирования;
в) выполнить п. а).
Квадрирование прекращается при $a_{\max} > 10^{50}$.

П р о г р а м м а 6. Деление (умножение) коэффициентов уравнения на заданное число

№ ячеек	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	ИП0	П9	КИП9	ИПА	÷	КП9	FL0	00	ИПС	ИПА
10	÷	ПС	С/П							

П р и м е ч а н и я:

1. При умножении коэффициентов в ячейки 04 и 10 записывается команда «×».
2. При записи программы с z-й ячейки в $(z + 08)$ записывается число z.

Ввод исходных данных: $a_n \div a_1$ – в ячейки $n \div 1$, $a_0 \to$ С; делитель – в ячейку А; $n \to 0$.

И н с т р у к ц и я: пуск: БП; z; С/П.

П р о г р а м м а 7. Извлечение корня N-й степени

№ ячеек	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	÷	Fx>0	04	/–/	ИПД	XY	Fx^y	С/П	БП	00

П р и м е ч а н и я:

1. При записи программы с z-й ячейки в $(z + 03)$ записывается число $(z + 05)$; в $(z + 10)$ записывается число z.
2. Заслать $1/2^m$ в Д.

И н с т р у к ц и я при вычислении i-го модуля x_i: нажать клавиши $i - 1$; i; С/П.

Программа 8. Разложение уравнения по степеням суммы (разности); деление уравнения на двучлен; вычисление значения многочлена

№ ячеек	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	Cx	ПС	ИПД	П9	ИПА	КИП9	×	ПВ	ИП9	÷
10	−	П9	КИП9	ИПВ	+	КП9	ИП9	ИПС	−	Fx=0
20	04	ИПС	÷	+	ПС	ИПД	−	Fx=0	02	С/П
30	ПВ	С/П								

Примечания:

1. Записанная программа осуществляет разложение уравнения по степеням двучлена.

2. При делении уравнения на двучлен необходимо в ячейку 21 записать команду С/П.

3. При вычислении многочлена необходимо в ячейки 15÷22 записать команды: ПС; ИПА; ×; ПВ; ИП9; Fx=0; 08; С/П.

4. При записи программы с ячейки z записать:

а) в ячейку $(z + 21)$ – число $(z + 04)$;

б) в ячейку $(z + 28)$ – число $(z + 02)$.

Ввод исходных данных: $a_n \div a_0$ – в ячейки $n \div 0$; параметр разложения b (или корень; см. стр. 19) – в ячейку А; $n \to$ Д.

Инструкция: нажать на клавиши БП; z; С/П; значение многочлена $f(b)$ – в ячейке В.

П р о г р а м м а 9. Деквадрирование уравнений

$$a_{im}z^2 + a_{i-1;m}z + a_{i-2;m} = 0$$

№ ячеек	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	ИПВ	F√	ПВ	2	×	ИПА	+	F√	ПА	ИП0
10	1	–	П0	С/П	Fx<0	00	ИПА	/–/	ПА	БП
20	00									

П р и м е ч а н и я:
При записи программы с z-й ячейки записать:
а) в ячейку $(z + 16)$ – число z;
б) в ячейку $(z + 21)$ – число z.
Ввод исходных данных:

$$\frac{a_{i-2;m}}{a_{im}} \to \text{B}\,; \quad \frac{a_{i-1;m}}{a_{im}} \to \text{A}\,; \quad m \to 0\,.$$

И н с т р у к ц и я:
а) нажать на клавиши БП; z; С/П;
б) затем – на С/П (в каждом цикле) или на /–/; С/П – до появления 0 на индикаторе.
Результаты счета: в ячейке А значение – 2α; в ячейке В – r^2.

П р о г р а м м а 10. Определение знаков модулей автоматически

№ ячеек	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	Cx	ПС	ИПА	/–/	ПА	ИП8	+	ИПА	×	ИП9
10	+	ПВ	ИПС	Fx=0	19	ИПВ	ПС	БП	02	÷
20	Fx^2	F √	1	–	Fx≥0	36	ИПС	П9	ИПА	/–/
30	ПА	ИП8	+	П8	ИПА	С/П	ИПВ	П9	ИПА	БП
40	31									

Ввод исходных данных: $a_{n-1} \to 8$; $\left(a_{n-2} - \sum r_i^2\right) \to 9$; $|x_i|$ или $|2\alpha_i| \to A$.

И н с т р у к ц и я: нажать на клавиши В/О; С/П.

После останова счета на индикаторе высвечивается модуль с соответствующим знаком.

Повторить для следующего корня, записав его значение в А. Содержимое ячеек 8 и 9 не менять! Счет начинать с модуля или 2α, имеющих наибольшие значения.

П р о г р а м м а 11. Вычисление действительной части комплексно-сопряженных корней по формуле **(9.1)**

№ ячеек	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	ИПА	Fx^2	ИПВ	Fx^2	–	ИП9	Fx^2	+	ИП9	÷
10	ИП9	÷	С/П							

Ввод исходных данных: $b \to 9$; $r_i \to A$; $r_{1,2} \to B$.

И н с т р у к ц и я: нажать на клавиши В/О; С/П.

После останова в ячейке x (на индикаторе) будет записано значение α_i.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений. IV. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
2. Крылов А.Н. Лекции о приближенных вычислениях. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1975.
5. Скарборо Дж. Численные методы математического анализа. – М.-Л.: ГТТИ, 1934.
6. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Наука, 1966.
7. Демидович П.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970.
8. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984.
10. Загускин В.Л. Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений. – М.: Физматгиз, 1960.
11. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1964.
12. Энциклопедия математики. Т. 3. – М.: Сов. энциклопедия, 1980.
13. Сушкевич А.К. Основы высшей алгебры. – М.: Гостехиздат, 1932.
14. Бут Э.Д. Численные методы. – М.: Физматгиз, 1959.
15. Численные методы. – М.: Высшая школа, 1976.
16. Фильчаков П.Ф. Численные и графические методы прикладной математики. – Киев: Наукова думка, 1970.
17. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра. Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра. – М.: Наука, 1965.
18. Воеводин В.В. Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы. – М.: Наука, 1967.
19. Воеводин В.В., Ботацева Л.П. Стандартная подпрограмма определения всех корней алгебраического многочлена методом парабол. – М.: Изд-во МГУ, 1960.
20. Воеводин В.В. Стандартная подпрограмма определения всех корней алгебраического многочлена. – М.: Изд-во МГУ, 1960.
21. Дьяконов В.П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторах. – М.: Наука, 1986.
22. Трохименко Я.К., Любич Ф.Д. Инженерные расчеты на программируемых микрокалькуляторах. – Киев: Техника, 1985.
23. Трохименко Я.К., Любич Ф.Д. Инженерные расчеты на микрокалькуляторах. – Киев: Техника, 1980.
24. Безикович Я.С. Приближенные вычисления. – М.-Л.: Гостехиздат, 1941.